EJERCICIOS RESUELTOS

1) Halla $f(4)$ si $f(x) = e^{kx}$ y $f(2) = 3$.
Resolución:
Como $f(2) = e^{k2} = 3$ tenemos que $f(4) = e^{k4} = (e^{k2})^2 = 3^2 = 9$
2) Resuelve $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$.
Resolución:
En algunas ecuaciones es necesario hacer un cambio de variable para su resolución.

Teniendo en cuenta las propiedades de las potencias, la ecuación puede escribirse:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 4^x + 2^3 2^x &= 320 \\ 4 \cdot 4^x + 8 \cdot 2^x &= 320. \end{aligned}$$

Expresando 4^x como potencia de dos,

$$4 \cdot 2^x 2^x + 8 \cdot 2^x = 320.$$

Se hace el cambio de variable $2x = y$, (por tanto $2^x 2x = y2$) y se obtiene:

$$4y^2 + 8y = 320$$

Basta ahora con resolver esta ecuación:

$$y^2 + 2y - 80 = 0$$

y se deshace ahora el cambio $y = 2x$,

$y_1 = -10 = 2^x$, no es posible encontrar un x que verifique esta condición (2^x es siempre positivo)

$y_2 = 8 = 2^x$ con lo que $x = 3$

La solución es, por tanto, $x = 3$.

3) Resuelve $5^x + 5^{x+2} + 5^{x+4} = 651$
Resolución:
Aplicando las propiedades de las potencias, la ecuación se puede escribir como

$$5^x + 5^2 5^x + 5^4 5^x = 651$$

Sacando factor común 5^x:

$$\begin{aligned} 5^x(1 + 52 + 54) &= 651 \\ 5^x 651 &= 651 \\ 5^x &= 1 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

4) Simplifica $\frac{3\cdot 2^n-4\cdot 2^{n-2}}{2^n-2^{n-1}}$.
Resolución:

$$\frac{3\cdot 2^n-4\cdot 2^{n-2}}{2^n-2^{n-1}}=\frac{2^n(3-4\cdot 2^{-2})}{2^n(1-2^{-1})}=\frac{3-1}{\frac{1}{2}}.$$

5) Las donaciones a un proyecto relacionado con el medio ambiente han ido creciendo con el tiempo desde 2.50 millones de euros en 1999 a 3.92 millones en 2003. Expresa dichas donaciones como una función exponencial del tiempo.

Resolución:

Buscamos t_0 y r para formar $D(t)=t_0e^{rt}$.

Sea $t=0$ en 1999, así $t=6$ para 2003.

Tenemos

$$2.50=t_0e^{rt}=t_0\rightarrow 3.92=2.50e^{6t},$$

despejando

$$\begin{aligned} 1.568 &= e^{6r}\\ log_e(1.568) &= 6r\\ 0.075 &= r. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$D(t)=2.50e^{0.075t}$$

6) Resuelve el sistema:

$$\begin{aligned} 2^x-3^y &= 7\\ 2^x+3^{y+1} &= 3. \end{aligned}$$

Resolución:

Haciendo el cambio $u=2^x$ y $v=3^y$, el sistema se escribe:

$$\begin{aligned} u-v &= 7\\ u+3v &= 11. \end{aligned}$$

cuya solución es: $u=8$ y $v=1$ y por lo tanto $x=log_2 6$ y $y=log_3 1$.

7) Sabiendo que $log_{10}2=0,301030$ y que $log_{10}3=0$, calcula $log_{10}6$ y $log_{10}8$.

Resolución:

$$log_{10}6=log_{10}(23)=log_{10}2+log_{10}3=0,301030+0,477121=0,778151$$

$$log_{10}8 = log_{10}2^3 = 3log_{10}2 = 30,301030 = 0,903090$$

8) Prueba que: $log_a\sqrt{x^5}+log_a\sqrt[3]{x^2}+log_a\sqrt[4]{x}+log_a\sqrt[3]{x}+log_a\sqrt[12]{x} = log_a x^5$
Resolución:

$$\begin{aligned}
& log_a\sqrt{x^5} + log_a\sqrt[3]{x^2} + log_a\sqrt[4]{x} + log_a\sqrt[3]{x} + log_a\sqrt[12]{x} = log_a x^5 = \\
& = log_a x^{\frac{5}{2}} + log_a x^{\frac{2}{3}} + log_a x^{\frac{1}{4}} + log_a x^{\frac{2}{3}} + log_a x^{\frac{1}{12}} = \\
& = (x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{12}}) \\
& = log_a x^5
\end{aligned}$$

9) Determina el valor de x sabiendo que $log_9(log_8(2^x-1)) = -\frac{1}{2}$.
Resolución:

$$\begin{aligned}
log_9(log_8(2^x-1)) &= -\frac{1}{2} \rightarrow log_8(2^x-1) = 9^{-\frac{1}{2}} \\
2^x - 1 &= 8^{-\frac{1}{3}} \\
2^x &= 3 \\
x &= log_2(3).
\end{aligned}$$

10) Determina el valor de x en $\frac{2+logx}{4} = \frac{1+2logx}{3+logx}$.
Resolución:
Sea $u = logx$.

$$\begin{aligned}
\frac{2+u}{4} &= \frac{1+2u}{3+u} \\
6 + 5u + u^2 &= 4 + 8u \\
u^2 - 3u + 2 &= 0.
\end{aligned}$$

Así, tenemos dos soluciones $u_1 = 1$ y $u_2 = 2$, y por lo tanto $x_1 = 10$ y $x_2 = 100$.

11) Resuelve el sistema:

$$\begin{aligned}
log_{10}(x \cdot y) &= 10 \\
x - y &= 0.
\end{aligned}$$

Resolución:
De la segunda ecuación resulta que $x = y$. Así, únicamente debemos de resolver la ecuación

$$log_{10}(x^2) = 10.$$

Por otra parte, $10 = log_{10}1$, de lo que resulta

$$x^2 = 1,$$

cuyas soluciones son $x = 1$ y $x = -1$.

12) Demuestra que $Sh(2x) = 2Sh(x)Ch(x)$.

Resolución:

Usando las definiciones de $Sh(x)$ y $Ch(x)$ tenemos

$$2Sh(x)Ch(x) = 2\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = Sh(2x).$$

13) Demuestra que $ArgSh(x) = log_e(x + \sqrt{(x^2+1)})$.

Resolución:

$$y = ArgShx \leftrightarrow x = Shy = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \leftrightarrow 2x = t - \frac{1}{t},\ (t = e^y)$$

$$t^2 - 2xt - 1 = 0 \leftrightarrow t = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

Como $t = e^y > 0$, obtenemos $y = log_e(x + \sqrt{(}x^2 + 1))$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Resuelve los sistemas:

$$\begin{array}{rcl} 2^x - 3^y & = & 7 \\ 3 \cdot 2^{x-1} - 3^{y+1} & = & -3. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2^x + 2^y & = & 10 \\ 2^{x-y} & = & 4. \end{array}$$

2) Expresa en la forma $2^{\frac{p}{q}}$, donde $\frac{p}{q}$ es racional, cada uno de los números:

$$\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{4}}\sqrt{\dfrac{1}{8}} \\ b & = & \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}}. \end{array}$$

3) Expresa $a = log_4 1000$ en función de $b = log_2$.
4) Resuelve los sistemas:

$$\begin{aligned} log_{x+y}36 &= 2 \\ x - y &= log_\pi 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} log_3 x + log_3 y &= 2 \\ x - y &= 8. \end{aligned}$$

5) Calcula los logaritmos $log_{70}1$, $log_3 81$ y $log_5 0.04$.
6) Dibuja las funciones: $y = 3^{1-2x}$ y $4^{|2-x|}$.
7) Dibuja la función: $y = log_7 3x + 2$.
8) Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 10^x - 5^{x-1}2^{x-2} &= 950 \\ 2^{x^2}5^{x^2} &= 0.001(10^{3-x})^2. \end{aligned}$$

9) Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} log8^{logx} - log2^{logx} &= log4 \\ log(7x-2)^2 &= 2log(3x-4). \end{aligned}$$

10) Sea $f(x) = log_8(2^x - 1)$, $g(x) = log_9 x$, resuelve la ecuación $(g \circ f)(x) = -\frac{1}{2}$.

11) Usando que $\frac{1}{2} < log_e 2 < 1$, prueba que $1 < log_e 4 < 2$ y que $-1 < log_e(\frac{1}{2}) < -\frac{1}{2}$.

12) Determina la región encerrada por las funciones $y = x^2 - 4$, $y = e^{-x}$ y $y = log_e(x+2)$.

13) Determinada máquina industrial se devalúa de modo que su valor después de t meses está dado por una función de la forma $Q(t) = Q_0 e^{0.04t}$. Después de 20 meses, la máquina cuesta 8000 euros. Calcula el valor de compra.

14) Demuestra que $x^a y^a = (xy)^a$ donde x, y, a son números reales.

15) Si $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$, $a > 0$. Prueba que $f(x+y) + f(x-y) = \frac{1}{2}f(x)f(y)$.

16) Comprueba que $ArgChx = log_e(x + \sqrt{x^2-1})\ \forall x \geq 1$.

17) Resuelve las ecuaciones: $Chx = \frac{5}{4}$ y $Chx + Shx = 2$.

18) Prueba que

$$ArgSh|x| = ArgCh\sqrt{x^2+1}.$$

19) Prueba que

$$\begin{aligned} Sh(x \pm y) &= Sh(x)Ch(x) \pm Ch(x)Sh(y) \\ Ch(x \pm y) &= Ch(x)Ch(x) \pm Sh(x)Sh(y). \end{aligned}$$

20) Prueba que

$$Th(x \pm y) = \frac{Th(x) \pm Th(y)}{1 \pm Th(x)Th(y)}.$$