

# Chapter 1

## Cálculo integral

1. Verificar que *La función de Dirichlet*.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable Riemann.

2. Determinar si la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{x} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ \cos x & \text{si } x \in [0, 2] \\ \ln x & \text{si } x \in [2, 3] \end{cases}$$

es integrable de Riemann.

3. Determinar la integral

$$\int_0^1 f(x) dx$$

siendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ 2 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 3 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x < 1. \end{cases}$$

4. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Determinar

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds$$

para todo  $x \in [0, 2]$ .

5. Calcular

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

siendo

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

6. Evaluar

$$\int_{-1}^1 |3x + 1| dx.$$

7. Calcular:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{4}.$$

8. Hallar  $F'(x)$  siendo

$$(a) F(x) = \int_0^{x+1} t^3 dt.$$

$$(b) F(x) = \int_{-1}^{x^2+1} t^2 dt.$$

9. Calcular la integral

$$\int_0^b \sin x dx$$

utilizando la regla de Barrow.

10. Estudiar, sin resolver la integral, los máximos mínimos, crecimiento y decrecimiento de  $F(x)$  para  $x \geq 0$  en  $\mathbb{R}$ , que está definida por

$$F(x) = \int_0^x \sin t^4 dt.$$

### INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN

1.  $\int (1 + \sqrt{x})(1 + x - \sqrt{x}) dx.$

2.  $\int (x^2 + 1)(x^2 - 2)x^{\frac{-2}{3}} dx.$

3.  $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx.$

4.  $\int \frac{x + 2}{x + 1} dx.$

5.  $\int \frac{2x - 7}{x^2 + 9} dx.$

6.  $\int \frac{2x + 3}{9x^2 - 12x + 18} dx.$

7.  $\int \sin^2 ax dx$

8.  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

9.  $\int \cos(6x + 7) \cos(2x - 5) dx.$

10.  $\int \sin 3x \cos 5x dx.$

11.  $\int \frac{x^5 - x^4 + 2x^3 - 7x^2 + x - 6}{(x - 1)^7} dx.$

## INTEGRALES RESOLUBLES POR PARTES

1.  $\int x\sqrt{1+x} dx.$

2.  $\int x^2 \ln x dx.$

3.  $\int x^2 \sin x dx.$

4.  $\int \sin(\ln x) dx.$

5.  $\int x^3 e^{2x} dx.$

6.  $\int \arcsin \frac{1}{x} dx.$

## INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

1.  $\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{2}{3}}} dx.$

2.  $\int \frac{e^{4x}}{e^{4x} + 1} dx.$

3.  $\int \frac{\tan \frac{1}{x}}{x^2} dx.$

4.  $\int \csc x dx.$

5.  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{5 + \sin^2 x}} dx.$

6.  $\int \frac{1}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} dx.$

7.  $\int x^3 \cos(2x^4 + 1) dx$

8.  $\int 3^{2x} \sin(1 + 3^{2x}) dx.$

9.  $\int \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

10.  $\int \frac{1}{e^x \cos^2 e^{-x}} dx.$

11.  $\int \frac{1}{x \sin^2(1 + \ln x)} dx.$

12.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^6}} dx.$

13.  $\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$

14.  $\int \frac{1}{\sqrt{-4x - x^2}} dx.$

15.  $\int \frac{1}{\sqrt{20 + 8x - x^2}} dx.$

16.  $\int \frac{1}{x^2 + 9} dx.$

17.  $\int \frac{1}{4x^2 + 9} dx.$

18.  $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 6e^x + 10} dx.$

19.  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4 + x^2}} dx$  efectuando el cambio de variable  $x = \frac{1}{t}$ .

20.  $\int \sin \sqrt{x} dx$  efectuando el cambio de variable  $t^2 = x$ .

21.  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$  efectuando el cambio de variable  $x = 2 \cos t$ .

22.  $\int \frac{(e^x - 2)e^x}{e^x + 1}dx$  efectuando el cambio de variable  $e^x = t$ .

23.  $\int x^5\sqrt{1-x^3}dx$  efectuando el cambio de variable  $1-x^3 = t$ .

24.  $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x}dx$  efectuando el cambio de variable  $\ln 2x = t$ .

25.  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}dx$  efectuando el cambio de variable  $e^x + 1 = t^2$ .

26.  $\int \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$  efectuando el cambio de variable  $\arcsin x = t$ .

27.  $\int \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{3}}}dx$  efectuando el cambio de variable  $x^{\frac{1}{6}} = t$ .

### INTEGRALES RACIONALES

1.  $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx.$

2.  $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx.$

3.  $\int \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}dx.$

4.  $\int \frac{4x^2-5x+2}{(4x^2-1)(5x-2)}dx.$

5.  $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx.$

6.  $\int \frac{1}{x(1+x)^2}dx.$

$$7. \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x - 3)^2(x + 1)^2} dx.$$

$$8. \int \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx.$$

$$9. \int \frac{12}{(x + 1)^2(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$10. \int \frac{1}{(x + 1)(x^2 + x + 1)^2} dx.$$

$$11. \int \frac{x^3 - 17}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx.$$

$$12. \int \frac{1}{(x^4 - 1)^2} dx.$$