

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Aplicaciones Lineales

1. Dadas las siguientes aplicaciones entre los \mathbb{R} -espacios vectoriales que se indican, razonar si son o no son aplicaciones lineales:

i) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 0)$.

ii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 8)$.

iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y, z) = 2x + y - 5z$.

iv) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y, z) = x^2 + y - 5z$.

v) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = (x, -2y, x + y)$.

vi) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = (x, y - 2, 0)$.

vii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = |x + y|$.

viii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = (x + y)^2$.

ix) $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \mid f(p(x)) = p'(x)$.

x) $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x] \mid f(p(x)) = x \cdot p'(x)$.

2. Sean V, W K -espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Demostrar:

i) Si $S = \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle \subseteq V$ entonces $f(S) = \langle f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_r) \rangle$.

ii) Si $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ es base de V entonces $\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ es sistema generador de $\text{Im}f$.

iii) Si f es suprayectiva entonces $\dim W \leq \dim V$.

3. ¿ Existe una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 0, 0) = (1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (2, -3)$, $f(0, 0, 1) = (-1, 2)$ y $f(1, 0, 1) = (-1, 1)$? ¿ Y si fuera $f(1, 0, 1) = (0, 3)$?

4. Para las aplicaciones lineales del ejercicio 1 obtener la matriz asociada en las bases canónicas, el núcleo, la imagen y clasificarlas (obtener si son o no inyectivas, suprayectivas o biyectivas).

5. Sean V, W K -espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow W$ aplicación lineal. Demostrar que $\dim V = \dim \text{Ker}f + \dim \text{Im}f$.

6. i) Demostrar que los siguientes conjuntos son base de \mathbb{R}^3 :

$$B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}, B_2 = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (-1, 1, 1)\},$$

$$B_3 = \{(1, 1, -1), (0, -1, 1), (-1, 0, 1)\}.$$

ii) Encontrar las matrices de cambio de base en cada uno de los siguientes casos y utilizar éstas para obtener a partir de las coordenadas en la primera base de $v = (-1, 2, 1)$, las coordenadas de éste en la segunda:

a) De B_1 a B_2 . b) De B_2 a B_1 . c) De B_1 a B_3 . d) De B_3 a B_1 . e) De B_2 a B_3 .

f) De B_3 a B_2 .

7. En los siguientes casos, obtener la matriz de f en las bases canónicas respectivas y $M_{B,B'}(f)$:

i) $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f_1(x, y, z) = (x + 2z, 2x + y + z)$, $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$, $B' = \{(1, 1), (1, 0)\}$.

ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid f_2(x, y) = (2x + y, 2x + y, x + 2y)$, $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$, $B' = \{(1, 1, 1), (0, 2, 0), (0, -1, 1)\}$.

iii) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f_3(x) = (x, 3x)$, $B = \{2\}$, $B' = \{(1, 1), (0, 1)\}$.

iv) $f_4 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \mid f_4(x, y, z, t) = x - y + z$, $B = \{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\}$, $B' = \{-2\}$.

v) $f_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)$, $B = B' = \{(1, 1), (2, 1)\}$.

8. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y f un endomorfismo de \mathbb{R}^3 tal que $f(u_1) = -u_1$, $f(u_2) = u_1 + 2u_2 + 2u_3$, $f(u_3) = -u_2 - u_3$. Supongamos que la matriz de cambio de base de B a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

i) $M_B(f)$, $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.

ii) $f^{-1}(S)$ donde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, y - z = 0\}$.

9. Determinar un endomorfismo f de \mathbb{R}^3 que verifique que $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ y $f(0, 1, 1) = (2, 1, -1)$.

10. Determinar un endomorfismo f de \mathbb{R}^3 que verifique que $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0, x + z = 0\}$ e $\text{Im } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

11. Consideremos la base de \mathbb{R}^3 $B_1 = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, 1)\}$ y la base de \mathbb{R}^2 $B_2 = \{(-1, 1), (-1, 0)\}$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que

$$M_{B_1, B_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

- i)** La matriz de la aplicación f respecto de las bases canónicas respectivas.
- ii)** La expresión analítica de dicha aplicación.
- iii)** El núcleo y la imagen de f y bases de estos subespacios.
- iv)** Clasifica f .
- v)** Si $v = (1, 1, -1)_{B_1}$, calcula las coordenadas de $f(v)$ respecto de la base canónica de \mathbb{R}^2 y respecto de la base B_2 .

12. Consideremos la base de \mathbb{R}^2 $B = \{(1, -1), (0, 1)\}$ y la base de \mathbb{R}^3 $\tilde{B} = \{(-1, -1, 0), (-1, 0, 1), (2, 0, 0)\}$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que

$$M_{B, \tilde{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

- i)** La matriz de la aplicación f respecto de las bases canónicas respectivas.
- ii)** La expresión analítica de dicha aplicación.
- iii)** El núcleo y la imagen de f y bases de estos subespacios.
- iv)** Clasifica f .
- v)** Si $v = (1, -1)$, calcula las coordenadas de $f(v)$ respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 y respecto de la base \tilde{B} .

13. Consideremos la base de \mathbb{R}^2 $B = \{(1, -1), (0, 1)\}$ y la base de \mathbb{R} $\tilde{B} = \{2\}$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que

$$M_{B, \tilde{B}}(f) = (1 \quad -1).$$

Calcular:

- i) La matriz de la aplicación f respecto de la bases canónicas respectivas.
- ii) La expresión analítica de dicha aplicación.
- iii) El núcleo y la imagen de f y bases de estos subespacios.
- iv) Clasifica f .
- v) Si $v = (0, 1)_B$, calcula las coordenadas de $f(v)$ respecto de las base canónica de \mathbb{R} y respecto de la base \tilde{B} .

14. Consideremos la base de \mathbb{R}^3 $B = \{(1, -1, 1), (0, 1, -1), (1, 0, -1)\}$. Sea f un endomorfismo de \mathbb{R}^3 tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

- i) La matriz de la aplicación f respecto de la base canónica.
- ii) La expresión analítica de dicha aplicación.
- iii) El núcleo y la imagen de f y bases de estos subespacios.
- iv) Clasifica f .
- v) Si $v = (-1, 1, 0)_B$, calcula las coordenadas de $f(v)$ respecto de las base canónica de \mathbb{R}^3 y respecto de la base B .

15. Consideremos la base de \mathbb{R}^2 $B = \{(1, -1), (1, 1)\}$. Sea f un endomorfismo de \mathbb{R}^2 tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

- i) La matriz de la aplicación f respecto de la base canónica.
- ii) La expresión analítica de dicha aplicación.
- iii) El núcleo y la imagen de f y bases de estos subespacios.
- iv) Clasifica f .
- v) Si $v = (-1, 0)$, calcula las coordenadas de $f(v)$ respecto de las base canónica de \mathbb{R}^2 y respecto de la base B .

16. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+3 & 4 \\ 1 & a+2 & a+2 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada al endomorfismo f de \mathbb{R}^3 en la base canónica.

a) Determinar razonadamente los valores de a para los cuales f^{-1} es aplicación (valores de a para los cuales A es invertible). ¿Cuál sería la matriz asociada a f^{-1} respecto de la base canónica? Obtenerla para el caso de que $a = -2$.

b) Para $a = -1$, calcula $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$, dando ecuaciones bases y dimensiones de éstos.

c) Discutir según los valores de a y b si existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(x, y, z) = (1, 2b, b)$.

17. En \mathbb{R}^3 se considera la base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ donde $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1)$ y sea $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica.

a) Obtener las matrices de cambio de base de B a B' y de B' a B .

b) Sea f un endomorfismo de \mathbb{R}^3 dado por: $f(u_1) = u_1 + u_2$; $f(u_2) = u_1 + u_3$; $f(u_3) = u_2 - u_3$.

-Hallar la matriz de dicho endomorfismo referida a la base B' .

-Hallar la matriz de dicho endomorfismo referida a la base canónica B .

-¿ Existe alguna relación entre ellas? En caso afirmativo explicar dicha relación.

c) Si $v = e_1 + 2e_2 - e_3$, hallar su imagen y expresarla en ambas bases.

18. En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 se considera la base $B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$ y sea f un endomorfismo de \mathbb{R}^3 tal que:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & x \end{pmatrix}$$

i) Calcula x para el cual f no es suprayectiva.

Para dicho valor de x .

ii) Calcula la expresión analítica de f y su matriz respecto de la base canónica.

iii) Calcula bases del núcleo y de la imagen de f ¿Es f inyectiva?

iv) Calcula las coordenadas de $f(1, 1, 1)$ respecto de la base B .

19. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que su matriz respecto de la base canónica C de \mathbb{R}^3 es:

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}.$$

donde $x \in \mathbb{R}$ tal que $(2, -4, 3) \in \text{Ker } f$.

i) Demuestra que $x = 2$.

ii) Calcula la matriz de f respecto de la base $B = \{(1, -1, 1), (2, 3, 0), (-2, 0, -1)\}$ y su expresión analítica.

iii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f . Calcula bases del núcleo y de la imagen de f .

iv) Calcula las coordenadas respecto de la base canónica de un vector v cuyas coordenadas respecto de la base B son 1, 0, 1 (o sea, $v = (1, 0, 1)_B$). Calcula las coordenadas de $f(v)$ respecto de la base B y respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 .

20. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, y consideremos la base de \mathbb{R}^3 $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (-1, 2, 3)$, $e_2 = (2, 1, 0)$ y $e_3 = (-1, 1, 2)$ y sea C la base canónica de \mathbb{R}^3 . Supongamos que:

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

donde $x \in \mathbb{R}$ cumple que tal que $f(e_1 + e_2) = (5, 4, 9)$.

i) Demuestra que $x = 2$.

ii) Calcula la matriz de f respecto de la base B y su expresión analítica.

iii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f . Calcula bases del núcleo y de la imagen de f .

21. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, y consideremos la base de \mathbb{R}^3 $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (1, -1, -2)$, $e_2 = (2, -1, -1)$ y $e_3 = (-1, 0, 0)$. Supongamos que:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

donde $x \in \mathbb{R}$ cumple que tal que $f(e_1 + e_2 + e_3) = (-2, -2, -4)$.

i) Demuestra que $x = 2$.

ii) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 y su expresión analítica.

iii) Estudia la inyectividad y suprayectividad de f . Calcula bases del núcleo y de la imagen de f .