

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Topología en \mathbb{R}^n . Continuidad de funciones de varias variables

1. Calcula el interior, la clausura, la frontera y el derivado de los siguientes subconjuntos del \mathbb{R}^n correspondiente:

i) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$.

ii) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.

iii) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$.

iv) $D = \{(0, 0), (1, 0)\}$.

v) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

vi) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 < 4\}$.

vii) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y < 0\}$.

viii) $H = [2, 3[\times] - 1, 3[$.

ix) $I = ([2, 3] \times [0, 1]) \cup \{(0, 1)\}$.

x) $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

xi) $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$.

xii) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4, 0 \leq z < 3\} \cup \{(-3, 0, 0)\} \cup \{(2, 0, 0)\}$.

xiii) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(2, 0, 0)\} \cup \{(4, 0, 0)\}$.

xiv) $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9\} \cup \{(4, 3, 1)\}$.

xv) $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$.

xvi) $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(1, 0)\}$.

xvii) $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(0, -3)\}$.

xviii) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$.

xix) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$.

xx) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\} \setminus \{(0, 1)\}$.

2. Calcula el dominio máximo donde podrías definir las siguientes funciones:

i) $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ ii) $f(x, y) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$ iii) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 - 9)$

iv) $f(x, y) = \frac{x+y}{xy^2}$ **v)** $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ **vi)** $f(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \frac{3}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \right)$.

3. Analiza la existencia del límite en $(0, 0)$ de las siguientes funciones:

i) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \frac{x+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

iii) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

iv) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

v) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \frac{xy+y^2}{x^2+y^2}$.

vi) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

vii) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^4}$.

viii) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}, x+y \right)$.

ix) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = \left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \right)$.

x) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^2y^2}$.

4. Analiza la continuidad de las siguientes funciones:

i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

iii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

iv) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

v) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

vi) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f_6(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

vii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f_7(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, y) \end{cases}$