

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Diagonalización de matrices

1. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ vectores propios de una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ asociados a valores propios distintos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Razonar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

- i)** Cada vector propio de A tiene asociado un único valor propio.
- ii)** Para todo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, αx es un vector propio asociado al mismo valor propio λ .
- iii)** x e y son vectores linealmente independientes.
- iv)** Una matriz tiene el valor propio 0 si y sólo si su determinante es 0.
- v)** $x + y$ es un vector propio de A .
- vi)** λ^n es un valor propio de A^n y si A es regular, $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1} .
- vii)** Si A, C son semejantes entonces tienen el mismo determinante, el mismo polinomio característico y los mismos valores propios.
- viii)** Dos matrices diagonalizables son semejantes si y sólo si tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

2. Estudiar los valores propios de las siguientes matrices, decir si son diagonalizables y en caso afirmativo obtener la matriz de paso y la potencia n -ésima siendo $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -26 & -15 \\ 50 & 29 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

i) Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula una matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

ii) Obtén otra matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada a la nueva matriz diagonal.

4. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

i) Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula una matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

ii) Obtén otra matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada a la nueva matriz diagonal.

5. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

i) Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula una matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

ii) Obtén otra matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada a la nueva matriz diagonal.

6. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

i) Analiza si es diagonalizable y en caso afirmativo calcula una matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

ii) Obtén otra matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada a la nueva matriz diagonal.

7. Sea f un endomorfismo diagonalizable de \mathbb{R}^3 con valores propios 1 y -1 y subespacios

propios $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z=0\}$ y $V_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0, x+y=0\}$.
Calcula la expresión analítica de f .

8. Sea f un endomorfismo diagonalizable de \mathbb{R}^3 con valores propios 0, -1 y 2 y subespacios propios $V_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0, x-z=0\}$, $V_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0, y+z=0\}$ y $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0, 2x+y=0\}$. Calcula la expresión analítica de f .

9. Sea $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 y f el endomorfismo de \mathbb{R}^3 definido por

$$f(e_1) = 4e_1 - 2e_2, f(e_2) = 2e_1 - e_2, f(e_3) = e_1 - 2e_2 + 3e_3.$$

a) Comprueba que f es diagonalizable.

b) Obtén una matriz diagonal semejante a la matriz anterior y la correspondiente base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ de vectores propios.

10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a un endomorfismo de \mathbb{R}^3 f en la base canónica.

a) Discutir según los valores de a y b si existen $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(x, y, z) = (1, b, 1)$.

b) Para $a = 0$, demostrar que la matriz A es diagonalizable, obtener la matriz diagonal semejante de A , la base correspondiente y la matriz de paso asociada P