Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Diferenciabilidad de funciones de varias variables

1. Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones:

i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

iii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

iv) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

v) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

vi) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

vii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

viii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ix) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

x) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

2. Calcula las derivadas parciales de las funciones anteriores en (a,b) siendo $(a,b) \neq (0,0)$.

3. Calcula para las siguientes funciones la matriz jacobiana y la diferencial en los puntos indicados:

i) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = (x^2y - xy, x^3 - y^3)$ en $(1,1)$.

ii) $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid g(x,y,z) = (x^2y - xyz + z^3, x^3 - y^3 + z^3)$ en $(1,1,1)$.

iii) $h:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid h(x,y) = (\cos x \cos y, \sin x \sin x, \sin x \cos y)$ en $(\pi/2, 0)$.

iv) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f(x) = (\mathrm{e}^x, 2x, 3x^2)$ en 0.

4. Calcula el gradiente en el punto indicado de las siguientes funciones:

i) $f:\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = x^{x+y}$ en $(1,1)$.

ii) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y,z) = \frac{x^2+\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^z}$ en $(0,0,0)$.

5. Calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de las siguientes funciones en el punto indicado:

i) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = x^2y^2 + 2x + 2y$ en $(1,0)$.

ii) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ en $(0,0)$.

iii) $f:\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$ en $(-1,-1)$.

6. Supongamos $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ siendo A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $a \in A$ tal que $\mathrm{d}f(a)(x,y) = (x+y, x+2y, y)$. Calcula las derivadas parciales y las derivadas direccionales en la direcciones de los vectores $v_1 = (1,-1)$, $v_2 = (-1,-1)$ y $v_3 = (0,-1)$ de las funciones coordenadas de f en a, y la matriz jacobiana de f en a.

7. Supongamos que A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in A$. Si $\mathrm{D}_{(1,-1)}f(a) = -1$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 2$, calcula la matriz jacobiana y la diferencial de f en a.

8. Supongamos $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ siendo A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ y $a \in A$ tal que la matriz jacobiana de f en a es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula la diferencial de f en a y las derivadas parciales y las derivadas direccionales en la direcciones de los vectores $v_1 = (-1, -1, 1)$, $v_2 = (-1, -1, -1)$ y $v_3 = (0, -1, 0)$ de las funciones coordenadas de f en a.

9. Supongamos $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ siendo A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ y $a \in A$ tal que $\mathrm{D}_{v_1}f(a) = -1$, $\mathrm{D}_{v_2}f(a) = 1$ y $\mathrm{D}_{v_3}f(a) = 0$ siendo $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ y $v_3 = (0, 1, 1)$. Calcula las derivadas parciales y la diferencial de f en a.

10. Sean $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + xz, xy + xz + yz)$ y $g(x, y) = (x + y, x - y)$. Calcula la matriz jacobiana de $F = g \circ f$ en $(-1, 1, 0)$.

11. Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $f(x, y) = (x^2 + y^2, x + y, x - y)$ y $g(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z)$. Calcula la matriz jacobiana de $F = g \circ f$ en $(0, 1)$.

12. Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 en los puntos indicados de las siguientes funciones:

i) $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ en $(0, 0)$

ii) $f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$ en $(0, 0)$.

iii) $f(x, y) = x^y$ en $(1, 1)$.

iv) $f(x, y) = \sin x \sin y$ en $(0, 0)$.

v) $f(x, y) = \log(x + y)$ en $(1, 1)$.

vi) $f(x, y, z) = \cos x \cos y \sin z$ en $(0, 0, 0)$.

vii) $f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$ en $(0, 0, 0)$.

13. Calcula los extremos relativos de las siguientes funciones:

i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 1)^2$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = (x + 1)^2 - (y + 1)^2$.

iii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = -(x+2)^2 + (y+1)^2$.

iv) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = -(x+2)^2 - (y+1)^2$.

v) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = (x-1)^2 - (y-1)^2$.

vi) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$.

vii) $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = x^2 - 3x + y^2$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4, x < 0\}$.

viii) $f :]0,\pi[\times]0,\pi[\times]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$.

ix) $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = x^2 - y^2$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

x) $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = xy$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.

xi) $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = x^2 + y^2$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.

xii) $f : D_{12} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = 2x^2 - 3 - 2xy^2$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

xiii) $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y,z) = 2x + y + z$ siendo $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, x + z = 1\}$.

xiv) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = xy^2(1 - x - y)$.

xv) $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 20x + 20y + 10$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + xy - 12 = 0\}$.

xvi) $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

xvii) $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0, y + z = 0\}$.

14. Determina los extremos absolutos de las siguientes funciones:

i) $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + 16x - 12y$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \leq 0, y \leq 2\}$.

iii) $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ siendo $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

iv) $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$.

v) $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y + 1$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y, y \leq 2\}$.

vi) $f(x,y) = -(x+1)^2 - y^2$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$.

vii) $f(x,y) = (x-1)^2 + xy$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, y \leq 4\}$

viii) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$.

ix) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

x) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}$.

xi) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}$.

xii) $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-3)^2$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2 + 6x - 5, y \geq x - 1\}$.

xiii) $f(x,y) = x^2 + (y+1)^2$ en $D = \{(x,y) \mid y \geq x, y \leq -x^2 + 2\}$.

15. Comprueba que la ecuación $x^2 + xy + y^3 - 11 = 0$ define a y como función implicita de x en un abierto del punto $x = 1$ en el cual toma el valor $y = 2$. Calcula la primera y la segunda derivada de dicha función en el punto $x = 1$.

16. Comprueba que la ecuación $\sin x + \cos y - 1 = 0$ define a y como función implicita de x en un abierto del punto $x = \frac{\pi}{2}$ en el cual toma el valor $y = \frac{\pi}{2}$. Calcula su desarrollo de Taylor de grado 2 en $x = \frac{\pi}{2}$.

17. Comprueba que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ define a z como función implicita de x e y en un abierto del punto $(6, -3)$ en el cual toma el valor $z = -2$. Obtén su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $(6, -3)$.

18. Comprueba que la ecuación $xy\mathrm{e}^z + z\cos(x^2 + y^2)$ define a z como función implicita de x e y en un abierto del punto $(0, 0)$ en el cual toma el valor $z = 0$. Obtén su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $((0, 0)$.

19. Comprueba que la ecuación $z\mathrm{e}^{x^2+y^2} + x\cos z - 1 = 0$ define a z como función implícita de x e y en un abierto de $(x,y) = (0,0)$ donde toma el valor $z = 1$. Calcula las derivadas parciales primeras en $(0, 0)$ de dicha función.

20. Comprueba que la ecuación $\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y - \mathrm{e}^{2y} \operatorname{sen} x^2 = 0$ define a y como función implícita de x en un abierto de $x = 0$ donde toma el valor $y = 0$. Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de dicha función en $x = 0$.

21. Comprueba que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xe^t + yz - z^2 = 0 \\ y\cos t + x^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

define a las variables z y t como funciones implícitas de x e y en un entorno del punto $(x,y) = (2,1)$, con valor $(z,t) = (2,0)$. Determinar sus derivadas parciales de primer orden y segundo orden en dicho punto.

22. Comprueba que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y - z^2 - t^2 = 0 \\ x^2 - y - z^2 + t = 0 \end{cases}$$

define a las variables z y t como funciones implícitas de x e y en un entorno del punto $(x, y) = (2, 1)$, con valor $(z, t) = (2, 1)$. Determinar sus derivadas parciales de primer orden y segundo orden en dicho punto.

23. Calcula para que puntos el teorema de la función inversa asegura la existencia de una inversa local de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (2xy, y^2 - x^2)$.

24. Calcula para que puntos el teorema de la función inversa asegura la existencia de una inversa local de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \sin y)$.

25. Calcula para que puntos el teorema de la función inversa asegura la existencia de una inversa local de la aplicación $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (\frac{x^2}{1-x^2-y^2}, \frac{y^2}{1-x^2-y^2})$ siendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.