Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ecuaciones Diferenciales

1. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:

i) $y' - 2xy = x$ **ii)** $xy' = \sqrt{1-y^2}$ **iii)** $y' + y^2 \cos x = 0$ **iv)** $y' = x(y^2 - 1)$

v) $xy' - y = y^3$ **vi)** $2x + 3 + (2y-2)y' = 0$ **vii)** $y' = \frac{x^2+xy}{y^2}$ **viii)** $y' = \frac{x^2y+x^3}{xy^2+y^3}$

ix) $y' = \frac{x+y}{x-y}$ **x)** $xy' - y = x^2 \sec^2 x$ **xi)** $y + \mathrm{e}^x = y'$ **xii)** $y' - \frac{2}{x}y = -2x^2 \sin x$

xiii) $xy' + y = \mathrm{e}^x$ **xiv)** $y' - y = \mathrm{e}^x \cos x$ **xv)** $y' + y\cos x = \mathrm{e}^{-\sin x}$

xvi) $y' + y\cos x = \cos x$ **xvii)** $y' = \frac{-2xy-3y}{x^2+3x}$ **xviii)** $2xy^2 + 2xy + (2x^2y + x^2)y' = 0$

xix) $4xy - 6y^2 + (2x^2 - 12xy)y' = 0$ **xx)** $y' = \mathrm{e}^{x+y}$ **xxi)** $y' = \frac{xy-y^2}{x^2+2xy}$

xxii) $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$ **xxiii)** $y' + xy = \frac{1}{y}$ **xxiv)** $y' - \frac{y}{x} = \frac{-y^2}{x}$ **xxv)** $y' = xy\log y$

xxvi) $3x^2y^2 + 2xy + (2x^3y + x^2)y' = 0$ **xxvii)** $y' - \frac{y}{x} = -x\sin x$ **xxviii)** $y' - y = 2x\mathrm{e}^x$

xxix) $y' = \frac{x^4+x^3y}{x^2y^2+xy^3}$ **xxx)** $y' = \frac{x^2}{y^2-xy}$ **xxxi)** $y' - \frac{1}{x}y = y^{-1}$.

2. Resuelve la ecuación diferencial $y' = \frac{y}{y-2x}$ sabiendo que admite un factor integrante que sólo depende de la variable y.

3. Resuelve la ecuación diferencial $2y + 1 + xy' = 0$ sabiendo que admite un factor integrante que sólo depende de la variable x.

4. Resuelve los siguientes problemas de condiciones iniciales:

i) $\begin{cases} xy' - y = x^2\cos x \\ y(\frac{\pi}{2}) = \pi \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 2 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} y' = \dfrac{y+1}{x} \\ y(2) = 1 \end{cases}$ **iv)** $\begin{cases} y' - 2y = 2\mathrm{e}^{2x}x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

v) $\begin{cases} y' - \dfrac{4y}{x^2-4} = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ **vi)** $\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x^2+6x+10} = 0 \\ y(-3) = 2 \end{cases}$ **vii)** $\begin{cases} y' - 3x^2y = \mathrm{e}^{x^3}(1+3x^3) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

viii) $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **ix)** $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x+1} \\ y(0) = 3 \end{cases}$.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

i) $y^{(vi)} - 2y^{(v)} + y^{(iv)} - 4y''' - 8y'' + 16y' + 16y = 0$ **ii)** $y^{(v)} - 5y^{(iv)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y =$

0 **iii)** $y^{(v)}+3y^{(iv)}+y'''-y''-4y=0$ **iv)** $y^{(v)}-10y'''-20y''-15y'-4y=0$

v) $y^{(viii)}-4y^{(vii)}+6y^{(vi)}-8y^{(v)}+9y^{(iv)}-4y'''+4y''=0$ **vi)** $y^{(v)}-2y^{(iv)}+y'''=0$

vii) $y^{(vi)}=0$. **viii)** $y^{(iv)}-2y'''+5y''-8y+4=0$.

6. Calcula un sistema libre de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea sabiendo que su polinomio característico tiene a $3\pm 2\mathrm{i}$ con multiplicidad 3 y $-2\pm\mathrm{i}$ con multiplicidad 2.

7. Calcula un sistema libre de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea sabiendo que su polinomio característico tiene a $2\pm 3\mathrm{i}$ con multiplicidad 3 y $-2\pm\mathrm{i}$ con multiplicidad 1.

8. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, obtén una solución linealmente independiente a la dada:

i) $x^2y''+xy'-4y=0$ con solución $y_1(x)=x^2$.

ii) $x^2y''+xy'-y=0$ con solución $y_1(x)=x$.

iii) $x^2y''-3xy'+3y=0$ con solución $y_1(x)=x^3$.

iv) $xy''-2y'+xy=0$ con solución $y_1(x)=\cos x+x\sin x$.

9. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

i) $y''+y'-2y=\mathrm{e}^{2x}$ **ii)** $2y''-y'-y=4x\mathrm{e}^{2x}$ **iii)** $y''-2y'+y=x\mathrm{e}^{x}$

iv) $y''-4y'+4y=x^2$ **v)** $y''-y=\mathrm{e}^{x}$ **vi)** $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^{x}\cos x$ **vii)** $y''+y'-6y=x\mathrm{e}^{2x}$

viii) $y''+y=x\sin x$.

10. Resuelve los siguientes problemas de condiciones iniciales:

i) $\begin{cases} y''-y'-2y=\cos x \\ y(0)=0, y'(0)=-1 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} y''+4y=0 \\ y(0)=3, y'(0)=4 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} y''-2y'+y=1 \\ y(1)=0, y'(1)=0 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} y''-2y'-3y=30\sin 3x \\ y(0)=32, y'(0)=0 \end{cases}$ **v)** $\begin{cases} y''+4y=5x^2+2x+11 \\ y(0)=0, y'(0)=8 \end{cases}$

vi) $\begin{cases} y''-2y'+y=-2\mathrm{sen}\ x \\ y(0)=0, y'(0)=-1 \end{cases}$ **vii)** $\begin{cases} y''+2y'-3y=-65\mathrm{sen}(2x) \\ y(0)=6, y'(0)=12 \end{cases}$

viii) $\begin{cases} y'' + 4y = 8e^{2x} \\ y(0) = 2, y'(0) = 3 \end{cases}$ **ix)** $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 5\cos x \\ y(0) = 2, y'(0) = 0 \end{cases}$

x) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = -754\cos(5x) \\ y(0) = 25, y'(0) = 24 \end{cases}$

11. Un circuito eléctrico está compuesto por un generador de tensión (una pila o un alternador) E, una resistencia R, una bobina L y un condensador de capacidad C. Si denotamos por $I = I(t)$ la intensidad de corriente eléctrica que circula por el circuito en el instante de tiempo t, la ecuación diferencial que modeliza este fenómeno físico viene dada por

$$L\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + R\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{C}I = 0$$

en el caso de corriente continua y por

$$L\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + R\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{C}I = -E_0\omega\sin\omega t$$

donde E_0 y ω son constantes, en el caso de corriente alterna. Calcula la solución general de las dos ecuaciones anteriores en el caso de que $L = 1$, $R = 0.5$ y $C = 2$.

12. La velocidad de descomposición del Torio 234 en un instante t es directamente proporcional a la cantidad existente en dicho instante. Si 100 mg de éste se reducen a 82.04 mg en una semana, calcula la cantidad que tendremos en 3 semanas y el tiempo que debe transcurrir para que tengamos la mitad del Torio que teníamos inicialmente.

13. La velocidad de descomposición del Radio en un instante t es directamente proporcional a la cantidad existente en dicho instante. Es conocido que una cantidad de Radio se reduce a la mitad después de 1620 años. Calcula de 100 mg, que cantidad de radio quedaría después de 100 años.

14. La velocidad de transmisión de un virus en una población de 4000 habitantes es directamente proporcional al número de personas infectadas. Se sabe que en los 2 primeros días de la aparición del virus han sido infectadas 20 personas. Calcula el número de días que deben transcurrir para que 100 personas hayan sido contagiadas por dicho virus.

15. La velocidad de propagación de una noticia en una población es directamente proporcional al número de personas que la conocen. Si en una población de 200 personas, en el primer minuto de aparición de la noticia, ésta ya es conocida por 10 personas, calcula el tiempo que debe transcurrir para que dicha noticia sea conocida por la mitad de la población.