Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Producto escalar

1. Obtener una base ortonormal de los siguientes espacios vectoriales para el producto escalar canónico.

i) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$.

ii) $S_2 = \{x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + u = 0\}$.

iii) $S_3 = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = 0, z + 2u = 0\}$.

iv) $S_4 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y + z + u + t = 0, z + t + u = 0\}$.

v) $S_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0, y + t = 0\}$.

2. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico consideramos los subespacios:

$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$.

$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, x + y - z = 0\}$.

$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$.

$S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, x - y - z = 0\}$.

i) Calcula sus subespacios ortogonales.

ii) Obtén la proyección ortogonal y la distancia del vector $v = (2, 1, 0)$ a los subespacios anteriores.

iii) Calcula las proyecciones ortogonales y las simetrías de bases los subespacios anteriores.

3. En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar canónico, calcula la proyección ortogonal del subespacio $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ y obtén a partir de ésta la distancia de S a los vectores $(1, 1), (1, -1), (2, 0)$.

4. En el plano con el producto escalar canónico, calcula las ecuaciones de las siguientes aplicaciones lineales:

i) El giro de ángulo $\pi/2$.

ii) Las homotecias de razones -1 y $\frac{-1}{2}$.

iii) La proyección ortogonal y la simetría de base el subespacio $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x + 2y = 0\}$.

5. En el plano con el producto escalar canónico, si f_1 es un giro de ángulo π, f_2 es la proyección ortogonal de base $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$ y f_3 la simetría de base $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ calcula las ecuaciones de las siguientes aplicaciones lineales:

i) $f_1 \circ f_2 \circ f_3$.

ii) $f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

iii) $f_1 \circ f_3 \circ f_2$.

6. Para cada una de las siguientes matrices reales simétricas, calcula un matriz diagonal semejante y una matriz de paso ortogonal:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$