

Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Integral de Riemann

1. Calcula las sumas inferiores y las sumas superiores de Riemann de $f(x)$ para las particiones \mathcal{P} y \mathcal{P}' en los siguientes casos:

i) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en $[-1, 3]$ para $\mathcal{P} = \{-1, 1, 3\}$ y $\mathcal{P}' = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

ii) $f(x) = \cos x$ en $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ para $\mathcal{P} = \{\frac{-\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}$ y $\mathcal{P}' = \{\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\}$.

iii) $f(x) = 2^x$ en $[-2, 2]$ siendo $\mathcal{P} = \{-2, -1, 0, 2\}$ y $\mathcal{P}' = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

iv) $f(x) = -x^2 + 9$ en $[0, 3]$ siendo $\mathcal{P} = \{0, 1, 3\}$ y $\mathcal{P}' = \{0, 1, 2, 3\}$.

v) $f(x) = 2x + 3$ en $[-1, 4]$ siendo $\mathcal{P} = \{-1, 2, 4\}$ y $\mathcal{P}' = \{-1, 0, 2, 4\}$

2. Calcula las siguientes integrales:

i) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+2}} dx$ ii) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+1}} dx$ iii) $\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}} dx$ iv) $\int \frac{1}{x^2+2x+4} dx$ v) $\int \frac{1}{4x^2+4x+3} dx$
vi) $\int \frac{1}{4x^2-4x+4} dx$ vii) $\int \frac{x+1}{x^2-x+2} dx$ viii) $\int \frac{x-3}{x^2+2x+2} dx$ ix) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+5} dx$ x) $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2-2x+2}} dx$.

3. Calcula las siguientes integrales:

i) $\int \frac{33x^2-3x-6}{(9x^2-1)(2x+1)} dx$ ii) $\int \frac{x^5-3x^4-2x^3-7x^2+x-4}{x^3+3x^2-x-3} dx$ iii) $\int \frac{x^4+x^3-12x^2-25x-5}{x^3-7x-6} dx$
iv) $\int \frac{3x^3+2x^2+x-7}{x^4+x^3-3x^2-5x-2} dx$ v) $\int \frac{-x^3+4x^2-8x+7}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4} dx$ vi) $\int \frac{1}{4x^2-2x+1} dx$ vii) $\int \frac{1}{4x^2-4x+3} dx$
viii) $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$ ix) $\int \frac{x^2-9x-9}{x^3+5x^2+4x-10} dx$ x) $\int \frac{x^5-x^4+x^3-3x^2+2x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} dx$ xi) $\int \frac{5x+2}{4x^2-4x+3} dx$
xii) $\int \frac{18x+7}{9x^2+6x+5} dx$ xiii) $\int \frac{1}{9x^2+6x+3} dx$ xiv) $\int \frac{-x^2+3x+4}{x^3+4x^2+4x} dx$ xv) $\int \frac{4x^4+14x^2+3x-1}{4x^3-2x-2} dx$
xvi) $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$ xvii) $\int \frac{x^5+x^3-x^2+x-1}{x^4} dx$ xviii) $\int \frac{x^3+10x^2+27x+16}{x^4+5x^3+6x^2-4x-8} dx$ xix) $\int \frac{3x^2+3x-1}{(x^2+2x+2)(x-1)} dx$.

4. Calcula las siguientes integrales:

i) $\int \frac{4}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx$ ii) $\int \frac{1}{((2x+1)^2+1)^2} dx$ iii) $\int \frac{9}{(x^2+x+1)^2(x-1)^2} dx$ iv) $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$
v) $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx$.

5. Expresa la siguiente integral como suma de una función racional más integrales de funcionales racionales sin raíces complejas múltiples en sus denominadores, y sin necesidad de determinar los coeficientes indeterminados que aparezcan en los numeradores:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^3(x^2 + x + 1)x^2} dx.$$

6. Expresa la siguiente integral como suma de una función racional más integrales de funcionales racionales sin raíces complejas múltiples en sus denominadores, y sin necesidad de determinar los coeficientes indeterminados que aparezcan en los numeradores:

$$\int \frac{3}{(x - 5)^6(x^2 + 1)^3(x + 1)} dx.$$

7. Expresa la siguiente integral como suma de una función racional más integrales de funcionales racionales sin raíces complejas múltiples en sus denominadores, y sin necesidad de determinar los coeficientes indeterminados que aparezcan en los numeradores:

$$\int \frac{3}{x^2(x^2 + 9)^3(x^2 + 16)} dx.$$

8. Calcula las siguientes integrales:

i) $\int \frac{\sqrt{x^3}}{x-1} dx$ ii) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-1}} dx$ iii) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3-1}} dx$ iv) $\int \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x+1}} dx$ v) $\int \frac{x+\sqrt{(x+1)^3}}{(x-1)\sqrt{x+1}} dx$ vi) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+1}} dx$
vii) $\int x\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} dx$ viii) $\int \frac{\sqrt{(x-2)^3}-\sqrt{(x-2)^5}}{\sqrt{x-2+3}} dx$ ix) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{x} dx$ x) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-2} dx$.

9. Dada la integral

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} dx,$$

realiza un cambio de variable de forma que se obtenga una integral racional (integral de un cociente de polinomios). Expresa dicha integral como suma de una función racional y una integral de una función racional que no tenga un denominador con raíces complejas múltiples (sin determinar los coeficientes de los polinomios que se obtienen).

10. Calcula las siguientes integrales:

i) $\int \frac{e^x-1}{e^x+2} dx$ ii) $\int \frac{5^x+2}{5^x-1} dx$ iii) $\int \frac{1+\arcsin^2 x}{(1+\arcsin x)\sqrt{1-x^2}} dx$ iv) $\int \frac{\arctan x+3}{(2-\arctan x)(1+x^2)} dx$ v) $\int \frac{1}{e^{2x}-e^x} dx$
vi) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx$ vii) $\int \frac{\tan^3 x}{1+\tan^2 x} dx$ viii) $\int \cos^5 x dx$ ix) $\int \sin^4 x dx$ x) $\int \frac{1}{5-3\cos x+4\sin x} dx$

xi) $\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x} dx$ **xii)** $\int \frac{1}{10+6\sin x+8\cos x} dx$ **xiii)** $\int \tan^3 x dx$ **xiv)** $\int \frac{\tan x}{1+\sin x} dx$ **xv)** $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$
xvi) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ **xvii)** $\int \frac{1}{11-5\sin x+10\cos x} dx$ **xviii)** $\int \frac{1}{-1-\sin x-2\cos x} dx$.

11. Calcula las siguientes integrales:

i) $\int \sqrt{-4x^2 - 8x - 3} dx$ **ii)** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx$ **iii)** $\int \sqrt{4x^2 + 8x + 8} dx$ **iv)** $\int \sqrt{-x^2 + 4x} dx$
v) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}} dx$ **vi)** $\int \sqrt{x^2 - 2x - 3} dx$ **vii)** $\int \sqrt{-x^2 + 2x} dx$ **viii)** $\int \frac{x^2}{\sqrt{3x-x^2}} dx$.

12. Calcula las siguientes integrales definidas:

i) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ **ii)** $\int_1^{3\sqrt{2}/2+1} \sqrt{-x^2 + 2x + 8} dx$ **iii)** $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$
iv) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ **v)** $\int_3^6 \sqrt{x^2 - 9} dx$ **vi)** $\int_{5/2}^{5\sqrt{3}/2} \sqrt{25-x^2} dx$ **vii)** $\int_{3\sqrt{2}/2}^{3\sqrt{3}/2} \sqrt{9-x^2} dx$
viii) $\int_{\sqrt{2}/4}^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

13. Calcula el área limitada por la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$, las rectas $x = 0$ y $x = 4$ y el eje OX .

14. Calcula el área limitada por la función $f(x) = x^2 - 4$, las rectas $x = 0$ y $x = 3$ y el eje OX .

15. Calcula el área limitada por la función $f(x) = x^3 - 1$, las rectas $x = 0$ y $x = 2$ y el eje OX .

16. Calcula el área limitada por la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, las rectas $x = 0$ y $x = 3$ y el eje OX .

17. Calcula el área limitada por la función $f(x) = \sin x$, las rectas $x = \frac{-\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$ y el eje OX .

18. Calcula el área limitada por la función $f(x) = \cos x$, las rectas $x = -\pi$ y $x = \pi$ y el eje OX .

19. Calcula el área limitada por las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x$.

20. Calcula el área limitada por las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 5x - 6$.

21. Demostrar que el área de la circunferencia de radio r

$$x^2 + x^2 = r^2$$

es πr^2 .

22. Calcula el área de la elipse de semiejes de longitud a y b

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

23. Calcula el área de la región limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.

24. Calcula la longitud de la circunferencia de radio r

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

25. Calcula la superficie total y el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región del plano limitada por la gráfica de $y = x^3$, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje OX .

26. Calcula la superficie total y el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región del plano limitada por la gráfica de $y = x^2$, las rectas $x = 0$ e $x = 1$ alrededor del eje OX .

27. Calcula la superficie total y el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región del plano limitada por la gráfica de $y = \sin x$, las rectas $y = 0$ e $y = 1$ alrededor del eje OY .

28. Calcula el volumen de la esfera de radio r

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

29. Calcula el volumen del cilindro de radio r y altura h .

30. Calcula el volumen del cono de radio r y altura h .

31. Analiza la convergencia de las siguientes integrales impropias y calcula el valor de aquellas que sean convergentes:

i) $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$ **ii)** $\int_0^{+\infty} e^{2x} dx$ **iii)** $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+2} dx$ **iv)** $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx$ **v)** $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$
vi) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$ **vii)** $\int_{-\infty}^0 e^x \cos x dx$ **viii)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ **ix)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+10} dx$

32. Analiza la convergencia de las siguientes integrales impropias:

i) $\int_{-\infty}^0 \frac{2x^2+1}{x^2+2} dx$ **ii)** $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+\sin x+e^{2x}} dx$ **iii)** $\int_1^{+\infty} \frac{1-\sin x}{x^2} dx$ **iv)** $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^5+1}}{x^8+1} dx$ **v)** $\int_{100}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^4+1} dx$
vi) $\int_5^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x^5+10}} dx$.