Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Integración de funciones de varias variables

1. Calcula las siguientes integrales dobles:

i) $\int\int_{\Omega} xydxdy$ siendo $\Omega = [0,1] \times [1,3]$.

ii) $\int\int_{\Omega} y\mathrm{e}^{x}dxdy$ siendo $\Omega = [-1,1] \times [0,2]$.

iii) $\int\int_{\Omega} y\mathrm{cos}x dxdy$ siendo $\Omega = [0,\pi] \times [1,2]$.

iv) $\int\int_{\Omega} y\mathrm{arctan}x dxdy$ siendo $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

v) $\int\int_{\Omega} 2xdxdy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

vi) $\int\int_{\Omega}(x^2 + y)dxdy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

vii) $\int\int_{\Omega}(y + \mathrm{log}x)dxdy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$.

viii) $\int\int_{\Omega} \sqrt{x^2 - y^2}dxdy$ siendo Ω el interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,-1)$ y $(1,1)$.

ix) $\int\int_{\Omega} xydxdy$ siendo Ω el interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$.

x) $\int\int_{\Omega} \sqrt{4 - y^2}dxdy$ siendo Ω el recinto limitado por las curvas $y^2 = 2x$ e $y^2 = 8 - 2x$.

xi) $\int\int_{\Omega}(x^2 + y^2)dxdy$ siendo Ω el recinto limitado por las curvas $y = x^3$ e $y = x^2$.

xii) $\int\int_{\Omega} \mathrm{e}^{x/y}dxdy$ siendo Ω el recinto limitado por la curva $y^2 = x$ y las rectas $x = 0$ e $y = 1$.

xiii) $\int\int_{\Omega} xdxdy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, y \leq 4\}$.

2. Calcula, efectuando el cambio a coordenadas polares, las siguientes integrales dobles:

i) $\int\int_{\Omega} \mathrm{e}^{x^2+y^2}dxdy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

ii) $\int\int_{\Omega} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}dxdy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

iii) $\int\int_{\Omega} \mathrm{log}(x^2 + y^2)dxdy$ siendo Ω el recinto limitado por las circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

iv) $\int\int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$ siendo Ω la parte del interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que está en el primer cuadrante.

v) $\int\int_{\Omega} \mathrm{e}^{x^2+y^2}dxdy$ siendo Ω la parte del interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que está en el tercer y cuarto cuadrante.

vi) $\int\int_{\Omega} xdxdy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, -x \leq y \leq x\}$.

vii) $\int\int_\Omega xydxdy$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$.

3. Calcula, utilizando integrales dobles, el área de los siguientes conjuntos:

i) El interior de la circunferencia de radio r.

ii) El interior de la elipse de semiejes a y b.

iii) El interior del triángulo de vertices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$.

iv) La región delimitada por la recta $x+y=5$ y la curva $xy=6$.

4. Calcula $\int\int_\Omega xydxdy$ siendo Ω el paralelogramo delimitado por las rectas $x-2y-1=0$, $2x-y-5=0$, $x-2y-4=0$ y $2x-y-2=0$, efectuando el cambio de coordenadas $x=\frac{-u+2v}{3}$ e $y=\frac{v-2u}{3}$.

5. Calcula $\int\int_\Omega (x+y)^2 \mathrm{e}^{x-y} dxdy$ siendo Ω el paralelogramo delimitado por las rectas $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$ y $x-y=1$, efectuando un cambio de coordenadas adecuado.

6. Calcula las siguientes integrales triples:

i) $\int\int\int_\Omega y\mathrm{e}^{x+z} dxdydz$ siendo $\Omega = [0,2] \times [-1,1] \times [1,2]$.

ii) $\int\int\int_\Omega xyzdxdydz$ siendo $\Omega = [1,2] \times [0,1] \times [0,1]$.

iii) $\int\int\int_\Omega xy\cos z dxdydz$ siendo $\Omega = [0,1] \times [1,2] \times [0,\pi]$.

iv) $\int\int\int_\Omega zdxdydz$ siendo $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

v) $\int\int\int_\Omega y^2 dxdydz$ siendo $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

vi) $\int\int\int_\Omega (x+y+z^3) dxdydz$ siendo $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

7. Calcula, usando integrales triples, el volumen de los siguientes conjuntos:

i) El interior de la esfera de radio r.

ii) El interior del cilindro de radio r y altura h.

iii) El interior del cono de altura h y radio r.

8. Calcula, efectuando el cambio de coordenadas adecuado, las siguientes integrales:

i) $\int\int\int_\Omega (x^2+y^2+z^2) dxdydz$ siendo $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, y \leq 0\}$.

ii) $\int\int\int_\Omega \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$ siendo $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq 0\}$.

iii) $\int\int\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2} dxdydz$ siendo $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

iv) $\int\int\int_\Omega \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdydz$ siendo $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

v) $\int\int\int_\Omega ydxdydz$ siendo $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 4, x \leq 0, -1 \leq z \leq 1\}$.