AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2014/15

EXAMEN FINAL. 30–1–2015

Análisis Complejo

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.
- Los alumnos con el parcial aprobado sólo tendrán que responder a la tercera pregunta.

1. **(1 punto)** Enunciar el teorema de los residuos y esbozar su demostración.
2. **(1 punto)** Obtener el desarrollo en serie de la función $f(z) = \frac{z-1}{z^2(z+2)}$ en un entorno de los puntos $z_0 = 1$ y $z_0 = 0$.

Solución. Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{z-1}{z^2(z+2)} = \frac{3/4}{z} - \frac{1/2}{z^2} - \frac{3/4}{z+2}.$$

Para $z_0 = 1$, tenemos que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \quad si \quad |z-1| < 1,$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z^2} &= \frac{d}{dz}(\frac{1}{z}) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)(z-1)^n \quad si \quad |z-1| < 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{3-(1-z)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1-z}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-z}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n \quad si \quad |z-1| < 3. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z^2(z+2)} &= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)(z-1)^n - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3(-1)^n}{4} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2} - \frac{(-1)^n}{4\cdot 3^n}\right)(z-1)^n \quad si \quad |z-1| < 1. \end{aligned}$$

Para $z_0 = 0$,

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{-2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{-2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n \quad si \quad |z| < 2.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{z-1}{z^2(z+2)} &= \frac{3/4}{z} - \frac{1/2}{z^2} - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n \\
&= \frac{3/4}{z} - \frac{1/2}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^{n+1}}{2^{n+3}}z^n \quad si \quad 0<|z|<2.
\end{aligned}$$

3. **(1 punto)** Calcular la transformada de Laplace inversa de la función

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2+4z+4} + \frac{e^{-z}}{z^2+2z+2}$$

Solución. Por la linealidad de la transformada

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+1}{z^2+4z+4}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-z}}{z^2+2z+2}\right](t).$$

Calculamos aparte

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+1}{z^2+4z+4}\right](t) &= \operatorname{Res}\left(e^{zt}\frac{z+1}{z^2+4z+4}, -2\right) \\
&= \lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}\left((z+2)^2 e^{zt}\frac{z+1}{z^2+4z+4}\right) \\
&= \lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}\left(e^{zt}(z+1)\right) = e^{-2t} - te^{-2z}.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-z}}{z^2+2z+2}\right](t) = h_1(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+2z+2}\right](t-1).$$

Calculamos aparte

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+2z+2}\right](t) &= \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2+2z+2}, -1-i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2+2z+2}, -1+i\right) \\
&= \lim_{z\to -1-i}\frac{e^{zt}(z+1+i)}{z^2+2z+2} + \lim_{z\to -1+i}\frac{e^{zt}(z+1-i)}{z^2+2z+2} \\
&= \lim_{z\to -1-i}\frac{e^{zt}}{z+1-i} + \lim_{z\to -1+i}\frac{e^{zt}}{z+1+i} \\
&= \frac{e^{-t-ti}}{-2i} + \frac{e^{-t+ti}}{2i} = e^{-t}\frac{e^{ti}-e^{ti}}{2i} = e^{-t}\sin t,
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-z}}{z^2+2z+2}\right](t) &= h_1(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+2z+2}\right](t-1) \\
&= h_1(t)e^{-t+1}\sin(t-1).
\end{aligned}$$

Así

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = e^{-2t} - te^{-2z} + h_1(t)e^{-t+1}\sin(t-1).$$

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2014/15

EXAMEN PARCIAL. 30–1–2015

Parte Conjunta

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.

1. Contestar a las siguientes cuestiones:

   (a) **(1 punto)** Explicar en qué consiste el método de Euler para resolver una ecuación diferencial con condiciones iniciales. Indicar los diferentes errores que aparecen, su orden y la relación entre ambos. Indicar además como comprobarías experimentalmente cual es el orden del método de Euler.

   (b) **(1 punto)** Explicar que significa que una solución de un sistema autónomo sea estable, asintóticamente estable e inestable, poniendo un ejemplo de cada tipo.

2. **(1.5 puntos)** Sea la ecuación

$$y'' + ay' + by = \cos t.$$

Encontrar valores de a y b tales que el sistema sea asintónicamente estable y determinar la solución para tiempos suficientemente grandes.

Solución. La ecuación homogénea $y'' + ay' + by = 0$ tiene ecuación característica $p(t) = t^2 + at + b$. Para que sea asintóticamente estable debe de tener raíces con parte real negativa, por ejemplo -1 y -2. Entonces $p(-1) = 1 - a + b = 0$ y $p(-2) = 4 - 2a + b = 0$, de donde $a = 3$ y $b = 2$. Como la ecuación es asintóticamente estable, la solución a largo plazo es una solución particular. Tomando la transformada de Laplace tenemos que

$$\mathcal{L}[y](z) = F(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2+3z+2)}$$

y para tiempos suficientemente grandes

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq \operatorname{Res}(e^{zt}F(z), i) + \operatorname{Res}(e^{zt}F(z), -i) \\ &= \lim_{z\to i} \frac{ze^{zt}}{(z+i)(z^2+3z+2)} + \lim_{z\to -i} \frac{ze^{zt}}{(z-i)(z^2+3z+2)} \\ &= \frac{e^{it}(1-3i)}{20} + \frac{e^{-it}(1+3i)}{20} = \frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t. \end{aligned}$$

3. **(1.5 puntos)** Resolver el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Minimizar} & xy + z \\ \text{Sujeto a} & x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ & x + 1 \leq 0, \end{array}$$

sabiendo que el conjunto en que está definido es compacto.

Solución. En primer lugar, comprobamos que todos los puntos son regulares. Si $x+1<0$, entonces el gradiente $(2x,2y,2z)$ es linealmente independiente salvo si $x=y=z=0$, lo cual es imposible porque implicaría que $x^2+y^2+z^2=0$. Si $x+1=0$, entonces los vectore gradiente $(2x,2y,2z)$ y $(1,0,0)$ son linealmente independientes salvo que $y=z=0$. En este caso $x^2=5$, lo que implicaría que $x=\pm\sqrt{5}$, que no puede verificarse al ser $x=-1$.

Consideramos el Lagrangiano

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=xy+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5)+\mu(x+1).$$

De la condición de holgura $\mu(x+1)=0$ disitinguimos dos casos a) $\mu=0$ y b) $x=-1$.

Caso a) $\mu=0$. El Lagrangiano es $L(x,y,z,\lambda)=xy+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5)$ y los puntos de KKT se calculan a partir de las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}=y+2\lambda x=0, \\ \frac{\partial}{\partial y}=x+2\lambda y=0, \\ \frac{\partial}{\partial z}=1+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2=5. \end{cases}$$

De las dos primeras obtenemos que $x(1-4\lambda^2)=0$, y como $x\leq -1$, necesariamente $\lambda=\pm 1/2$. Si $\lambda=1/2$, entonces $x=-y$, $z=-1$ y por tanto $x=\pm\sqrt{2}$. Como $x\leq -1$, la única solución posible es

$$x=-\sqrt{2},\ y=\sqrt{2},\ z=-1,\ \lambda=1/2,\ \mu=0.\ (KKT1)$$

Si $\lambda=-1/2$, obtenemos como única solución

$$x=-\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2},\ z=1,\ \lambda=-1/2,\ \mu=0.\ (KKT2)$$

Caso b) $x=-1$. Los puntos de KKT se calculan a partir de las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}=y+2\lambda x+\mu=0, \\ \frac{\partial}{\partial y}=x+2\lambda y=0, \\ \frac{\partial}{\partial z}=1+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2=5, \\ x=-1. \end{cases}$$

Nótese que $\lambda\neq 0$ (en otro caso 1=0 en la tercera ecuación). De la segunda y tercera ecuaciones obtenemos $y=\frac{1}{2\lambda}=-z$, por lo que de la cuarta ecuación $y=\pm\sqrt{2}$. Si $y=\sqrt{2}$ obtenemos la solución

$$x=-1,\ y=\sqrt{2},\ z=-\sqrt{2},\ \lambda=\sqrt{2}/4,\ \mu=-\sqrt{2}/2,$$

que no es posible candidato a mínimo al ser μ negativo. Si $y=-\sqrt{2}$ tenemos

$$x=-1,\ y=-\sqrt{2},\ z=\sqrt{2},\ \lambda=-\sqrt{2}/4,\ \mu=\sqrt{2}/2.\ (KKT3)$$

que es el tercer posible candidato a mínimo. Calculamos ahora el Hessiano

$$HL(x,y,z,\lambda,\mu)=\begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Para el punto (KKT1) tenemos que el Hessiano

$$HL(-\sqrt{2},\sqrt{2},-1,1/2,0)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo espacio tangente es

$$\begin{aligned} M(-\sqrt{2},\sqrt{2},-1) &= \{(x,y,z): -\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-z=0\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} x=u, \\ y=v, \\ z=-\sqrt{2}u+\sqrt{2}v, \end{array} \right. \quad u,v\in\mathbb{R}, \end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} &(u,v,-\sqrt{2}u+\sqrt{2}v)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ -\sqrt{2}u+\sqrt{2}v \end{pmatrix} \\ = &\left(u+v,u+v,-\sqrt{2}u+\sqrt{2}v\right)\begin{pmatrix} u \\ v \\ -\sqrt{2}u+\sqrt{2}v \end{pmatrix} = (u+v)^2+(-\sqrt{2}u+\sqrt{2}v)^2, \end{aligned}$$

que es estrictamente positivo si $u,v\neq 0$, por lo que es definida positiva y por tanto mínimo local.

Para el punto (KKT2) tenemos que el Hessiano

$$HL(-\sqrt{2},-\sqrt{2},1,-1/2,0)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyo espacio tangente es

$$\begin{aligned} M(-\sqrt{2},-\sqrt{2},1) &= \{(x,y,z): -\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+z=0\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} x=u, \\ y=v, \\ z=\sqrt{2}u+\sqrt{2}v, \end{array} \right. \quad u,v\in\mathbb{R}, \end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} &(u,v,\sqrt{2}u+\sqrt{2}v)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{2}u+\sqrt{2}v \end{pmatrix} \\ = &\left(-u+v,u-v,-\sqrt{2}u-\sqrt{2}v\right)\begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{2}u+\sqrt{2}v \end{pmatrix} = (u-v)^2-(\sqrt{2}u+\sqrt{2}v)^2, \end{aligned}$$

que es estrictamente negativo si $u,v\neq 0$, por lo que es definida positiva y por tanto máximo local.

Finalmente, para el punto (KKT3) tenemos que el Hessiano

$$HL(-1,-\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2}/4,\sqrt{2}/2)=\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

cuyo espacio tangente es

$$\begin{aligned} M(-1,-\sqrt{2},\sqrt{2}) &= \{(x,y,z): x=0; z=y\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x=0, \\ y=u, \quad u\in\mathbb{R}, \\ z=u, \end{array} \right. \end{aligned}$$

Calculamos

$$
\begin{aligned}
& (0,u,u)\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ u \\ u \end{pmatrix} \\
= \; & \left(u, -u\sqrt{2}/2, -u\sqrt{2}/2\right)\begin{pmatrix} 0 \\ u \\ u \end{pmatrix} = -\sqrt{2}u^2,
\end{aligned}
$$

que es menor que cero si $u \neq 0$, por lo que es definida negativa, por lo que no puede ser mínimo. Por lo tanto $KKT1$ es el mínimo pedido.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2014/15

EXAMEN PARCIAL. 30–1–2015

Teoría de Campos

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.
- Los alumnos con el parcial aprobado sólo tendrán que responder a la tercera pregunta.

1. **(1 punto)** Enunciar el Teorema de Gauss, definir todos los conceptos que aparecen en el enunciado del mismo y poner un ejemplo en que se aplique.

2. **(1 punto)** Sea γ una curva que une los puntos $(1,1,0)$ y $(2,2,2)$. Calcular

$$\int_\gamma (2xy^2 + 2xz^2)dx + (1 + 2yx^2)dy + 2zx^2 dz.$$

Solución. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy^2 + 2xz^2, 1 + 2yx^2, 2zx^2)$, que como se puede comprobar tiene rotacional nulo. Como está definido sobre todo $\mathbb{R}^3$, que es convexo, existe $f(x,y,z)$ una función potencial. Verifica entonces

$$f(x,y,z) = \int \frac{\partial f}{\partial x}dx = \int (2xy^2 + 2xz^2)dx = x^2y^2 + x^2z^2 + g(y,z).$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2yx^2 = 2yx^2 + \frac{\partial g}{\partial y},$$

por lo que

$$g(y,z) = \int \frac{\partial g}{\partial y}dy = \int 1dy = y + h(z),$$

por lo que

$$f(x,y,z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y + h(z).$$

Finalmente

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2zx^2 = 2zx^2 + h'(z),$$

de donde $h'(z) = 0$, por lo que $h(z)$ es constante y una función potencial es

$$f(x,y,z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y.$$

Entonces

$$\int_\gamma (2xy^2 + 2xz^2)dx + (1 + 2yx^2)dy + 2zx^2 dz = f(2,2,2) - f(1,1,0) = 32.$$

3. **(1 punto)** Resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = u, \ x \in (0,2), \ y \in (0,1), \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, \ x \in (0,2), \\ u(0,y) = 0, \ y \in (0,1), \\ u(2,y) = \cos(6\pi y), \ y \in (0,1). \end{cases}$$

Solución. Proponemos una función de la forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, con la que la ecuación se escribe como

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = X(x)Y(y),$$

de donde

$$\frac{X(x) - X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

por lo que tenemos los problemas

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(1) = 0, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} X''(x) - (1+\lambda)X(x) = 0, \\ X(0) = 0. \end{cases}$$

El primero tiene una solución no nula de la forma

$$Y_n(y) = \sin(n\pi y)$$

para $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$. El segundo problema tiene solución general

$$X_n(x) = A_n e^{x\sqrt{1+\pi^2 n^2}} + B_n e^{-x\sqrt{1+\pi^2 n^2}},$$

y como $X_n(0) = 0$, tenemos que $A_n = -B_n$. Así

$$X_n(x)Y_n(y) = A_n(e^{x\sqrt{1+\pi^2 n^2}} - e^{-x\sqrt{1+\pi^2 n^2}})\sin(n\pi y),$$

y proponemos una solución formal

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(e^{x\sqrt{1+\pi^2 n^2}} - e^{-x\sqrt{1+\pi^2 n^2}})\sin(n\pi y).$$

De la condición $u(2,y) = \cos(6\pi y)$ obtenemos

$$u(2,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(e^{2\sqrt{1+\pi^2 n^2}} - e^{-2\sqrt{1+\pi^2 n^2}})\sin(n\pi y) = \cos(6\pi y),$$

de donde

$$\begin{aligned} A_n(e^{2\sqrt{1+\pi^2 n^2}} - e^{-2\sqrt{1+\pi^2 n^2}}) &= 2\int_0^1 \cos(6\pi y)\sin(n\pi y)dy \\ &= \begin{cases} n\frac{(-1)^n - 1}{(n^2+36)\pi} \; si \; n \neq 6, \\ 0 \; si \; n = 6. \end{cases} . \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq 6}}^{\infty} n\frac{(-1)^n - 1}{(n^2+36)\pi} \frac{e^{x\sqrt{1+\pi^2 n^2}} - e^{-x\sqrt{1+\pi^2 n^2}}}{e^{2\sqrt{1+\pi^2 n^2}} - e^{-2\sqrt{1+\pi^2 n^2}}} \sin(n\pi y) \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq 6}}^{\infty} n\frac{(-1)^n - 1}{(n^2+36)\pi} \frac{\sinh(x\sqrt{1+\pi^2 n^2})}{\sinh(2\sqrt{1+\pi^2 n^2})} \sin(n\pi y). \end{aligned}$$