AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2014/15

EXAMEN FINAL. 10–7–2015

Análisis Complejo

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.
- Los alumnos con el parcial aprobado sólo tendrán que responder a la tercera pregunta.

1. **(1 punto)** Enunciar las fórmulas integrales de Cauchy y esbozar su demostración.
2. **(1 punto)** Obtener el desarrollo en serie de la función $f(z) = \frac{z+3}{z^2(z+2)}$ en un entorno de los puntos $z_0 = i$ y $z_0 = 0$.

Solución. Tomamos en primer lugar el punto $z_0 = i$. Descomponemos en fraccciones simples

$$\frac{z+3}{z^2(z+2)} = \frac{-1/4}{z} + \frac{3/2}{z^2} + \frac{1/4}{z+2}.$$

Calculamos aparte

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{z-i+i} = \frac{1}{i-(-(z-i))} = \frac{1/i}{1-\frac{-(z-i)}{i}} \\ &= \frac{1}{i}\frac{1}{1-\frac{(z-i)}{i}} = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)}{i^n}^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{i^{n+1}},\end{aligned}$$

si $|z-i|<1$.

Por otra parte,

$$\frac{1}{z^2} = -\frac{d}{dz}\frac{1}{z} = -\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{i^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(z-i)^{n-1}}{i^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(z-i)^n}{i^{n+2}},$$

también si $|z-i|<1$. Finalmente

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+2} &= \frac{1}{2+i+z-i} = \frac{1}{2+i-(-(z-i))} = \frac{1}{2+i}\frac{1}{1-(\frac{-(z-i)}{2+i})} \\ &= \frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(z-i)}{2+i}\right)^n = \frac{2-i}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(2-i)}{5}\right)^n (z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2-i)^{n+1}}{5^n}(z-i)^n,\end{aligned}$$

si $\left|\frac{-(z-i)}{2+i}\right| < 1$, o equivalentemente $|z-i| < \sqrt{5}$. Tomando los resultados anteriores y sustituyendo, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{z+3}{z^2(z+2)} &= \frac{-1/4}{z} + \frac{3/2}{z^2} + \frac{1/4}{z+2} \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{i^{n+1}} + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(z-i)^n}{i^{n+2}} \\ &\quad +\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2-i)^{n+1}}{5^n}(z-i)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4i^{n+1}} + \frac{3}{2}i\frac{(n+1)}{i^{n+2}} + \frac{(-1)^n(2-i)^{n+1}}{4\cdot 5^n}\right)(z-i)^n,\end{aligned}$$

si $|z-i| < \min\{1, \sqrt{5}\}$, o sea $|z-i| < 1$, que es el radio de convergencia dónde tienen sentido todas los desarrollos en serie de potencias anteriores.

Tomamos ahora el punto $z_0 = 0$ y la descomposición en fracciones simples

$$\frac{z+3}{z^2(z+2)} = \frac{-1/4}{z} + \frac{3/2}{z^2} + \frac{1/4}{z+2}.$$

Ahora sólo hemos de desarrollar

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{-z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n,$$

si $|z/2| < 1$, o equivalentemente $|z| < 2$. Así, obtenemos el desarrollo en serie de Laurent

$$\begin{aligned}\frac{z+3}{z^2(z+2)} &= \frac{3/2}{z^2} + \frac{-1/4}{z} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n \\ &= \frac{3/2}{z^2} + \frac{-1/4}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+3}}z^n,\end{aligned}$$

siempre que $0 < |z| < 2$.

3. **(1 punto)** Calcular la transformada de Laplace inversa de la función

$$F(z) = \frac{z}{z^2+4z+4} + \frac{e^{-2z}}{z^2+2z+2}.$$

Solución. Tomamos la transformada de Laplace inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+4z+4} + \frac{e^{-2z}}{z^2+2z+2}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+4z+4}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2z}}{z^2+2z+2}\right](t).$$

Los polos de $\frac{z}{z^2+4z+4}$ es -2 que tiene multiplicidad dos. Mediante la fórmula de inversión compleja obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+4z+4}\right](t) &= \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}z}{z^2+4z+4}, 2\right) \\ &= \lim_{z\to-2}\frac{d}{dz}\left(e^{zt}z\right) = \lim_{z\to-2} e^{zt} + tze^{zt} \\ &= e^{-2t} - 2te^{-2t} = e^{-2t}(1-2t).\end{aligned}$$

Para el segundo sumando utilizamos segundo teorema de traslación

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2z}}{z^2+2z+2}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+2z+2}\right](t-2)h_2(t),$$

donde $h_2(t)$ es la función de Heaviside en 2. Dado que los polos de $\frac{1}{z^2+2z+2}$ son $-1\pm i$, calculamos aparte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+2z+2}\right](t) &= \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2+2z+2}, -1+i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2+2z+2}, -1-i\right) \\ &= \lim_{z\to-1+i}\frac{e^{zt}}{z+1+i} + \lim_{z\to-1-i}\frac{e^{zt}}{z+1-i} \\ &= \frac{e^{t(i-1)}}{2i} - \frac{e^{t(-i-1)}}{2i} = e^{-t}\frac{e^{ti}-e^{-ti}}{2i} \\ &= e^{-t}\sin t.\end{aligned}$$

Resumiendo

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+4z+4}+\frac{e^{-2z}}{z^2+2z+2}\right](t)=e^{-2t}\,(1-2t)+h_2(\mathrm{t})e^{-(t-2)}\sin(t-2).$$

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2014/15

EXAMEN PARCIAL. 10–7–2015

Parte Conjunta

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.

1. Contestar a las siguientes cuestiones:
   (a) **(1 punto)** Explicar en qué consisten los métodos de Runge Kutta.
   (b) **(1 punto)** Explicar qué significa que un problema de optimización sea regular.

2. **(1.5 puntos)** Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = ax + by - 100. \end{cases}$$

Encontrar valores de a y b tales que el sistema sea asintónicamente estable y determinar la solución para tiempos suficientemente grandes.

Solución. Dado que el sistema es lineal, consideramos la matriz del sistema

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ a & b-t \end{vmatrix} = t^2 - bt - a.$$

Sus raíces serán por tanto

$$t = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2}.$$

Las raíces tendrán parte real no negativa si $b < 0$ y o bien el discriminante $b^2 - 4a < 0$, en cuyo caso tendríamos dos soluciones compleja conjugadas con parte real $b/2 < 0$, o bien el discriminante cumple $b^2 - 4a > 0$ junto con $a > 0$, en cuyo caso tendríamos dos soluciones reales negativas, ya que $b - \sqrt{b^2 - 4a} < 0$.

Como el problema pide un par de valores a y b, tomamos por ejemplo $b = -4$ y $a = -3$, que nos proporciona las soluciones

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -1 \ y \ -3,$$

que como vemos son negativos. Entonces, la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathbf{A}} \cdot \mathbf{C} + \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix}$$

donde se verifica que la parte no homogénea cumple

$$\lim_{t\to\infty} e^{t\mathbf{A}}\cdot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

y por tanto para tiempos suficientemente grandes la solución dependerá únicamente de las soluciones paticulares. Por el método de los coeficientes indeterminados podemos tomar

$$\begin{pmatrix}x_p(t)\\y_p(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix},$$

donde A y B son dos constantes a determinar. Sustituyendo en el sistema original tenemos

$$\begin{cases}0=B,\\0=-3A-4B-100,\end{cases}$$

de donde $A=\frac{-100}{3}$. Por lo tanto las soluciones para tiempo suficientemente grande es

$$\begin{cases}x_p(t)=-100/3,\\y_p(t)=0.\end{cases}$$

Nota: Estas soluciones también pueden obtenerse a partir de la transformada de Laplace, pero al tomar la inversa y aplicar la fórmula de inversión compleja no habrá que tomar los polos negativos.

3. **(1.5 puntos)** Resolver el siguiente problemaResolver el siguiente problema

$$\begin{array}{cc}\text{Maximizar} & x+y+z\\ \text{Sujeto a} & x^2+y^2+z^2=1,\end{array}$$

sabiendo que el conjunto en que está definido es compacto.

Solución. Dado que existe una única ligadura de igualdad, tenemos que todos los puntos son regulares. Contruimos el lagrangiano

$$L(x,y,z,\lambda)=x+y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1),$$

y tomamos la condición estacionaria

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}&=1+2x\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}&=1+2y\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial z}&=1+2z\lambda=0,\end{aligned}$$

junto con la ligadura

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

De las tres primeras condiciones tenemos que

$$x=y=z=-\frac{1}{2\lambda},$$

y sustituyendo en la expresión anterior tenemos que

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{3}{4\lambda^2} = 1,$$

de donde

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Obtenemos entonces los candidatos

$$x = y = z = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y

$$x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

que obviamente son factibles. Calculamos la matriz Hessiana

$$HL(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Obviamente

$$HL\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

es definida negativa al tener todos sus valores propios negativos y por tanto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ es el máximo pedido, que tomará el valor $\sqrt{3}$ en su función objetivo.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2014/15

Examen parcial. 10–7–2015

Teoría de Campos

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.
- Los alumnos con el parcial aprobado sólo tendrán que responder a la tercera pregunta.

1. **(1 punto)** Enunciar el Teorema de Green, definir todos los conceptos que aparecen en el enunciado del mismo y poner un ejemplo en que se aplique.
2. **(1 punto)** Sea γ una curva que une los puntos $(1,1,0)$ y $(2,2,2)$. Calcular

$$\int_\gamma (2xy^2+2xz^2)dx+(1+2yx^2)dy+2zx^2dz.$$

Solución. Como vemos el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(2xy^2+2xz^2,1+2yx^2,2zx^2)$ está constituido por polinomios que son infinitamente dervables y están definidos sobre todo el espacio. Veamos en primer lugar que el rotacional es nulo, lo que por las propiedades de $\mathbf{F}$ indicará que el campo es conservativo. Calculamos

$$rot(\mathbf{F})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^2+2xz^2 & 1+2yx^2 & 2zx^2 \end{vmatrix}=(0,4xz-4xz,4xy-4xy)=(0,0,0),$$

por lo que existe la función potencial que cumple

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy^2+2xz^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 1+2yx^2, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2zx^2. \end{aligned}$$

Integrando en la primera ecuación obtenemos

$$f(x,y,z)=\int \frac{\partial f}{\partial x}dx=\int(2xy^2+2xz^2)dx=x^2y^2+x^2z^2+g(y,z).$$

Derivando esta expresión respecto de la variable y e igualando a la segunda ecuación obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2yx^2+\frac{\partial g}{\partial y}=1+2yx^2,$$

de donde simplificando

$$\frac{\partial g}{\partial y}=1,$$

e integrando

$$g(y,z)=\int\frac{\partial g}{\partial y}dy=\int dy=y+h(z),$$

por lo que

$$f(x,y,z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y + h(z).$$

Finalmente, derivamos esta última expresión respecto de z y sustituimos en la tercera ecuación obteniendo

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2zx^2 = 2zx^2 + h'(z),$$

de donde $h'(z) = 0$ y por tanto $h(z)$ es constante, que podemos tomar como cero ya que es únicamente fijar un nivel de energía. Por lo tanto, la función potencial pedida es

$$f(x,y,z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y$$

y la integral que vamos buscando es

$$\int_\gamma (2xy^2 + 2xz^2)dx + (1 + 2yx^2)dy + 2zx^2dz = f(2,2,2) - f(1,1,0) = 34 - 2 = 32.$$

3. **(1 punto)** Resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{yy},\ t > 0,\ y \in (0,10), \\ u(t,0) = u(t,10) = 0,\ t > 0, \\ u(0,y) = 0,\ y \in (0,10), \\ u_t(0,y) = \sin(10\pi y),\ y \in (0,10). \end{cases}$$

Solución. Se trata de la ecuación de ondas, de donde, tomando separación de variables $u(t,y) = T(t) \cdot Y(y)$ planteamos el problema de la forma

$$\frac{T''}{T} = \frac{Y''}{Y} = \lambda,$$

siempre que T e Y sean disitintos de cero. Obtenemos el problema de contorno

$$\begin{cases} Y'' - \lambda Y = 0, \\ Y(0) = Y(10) = 0, \end{cases}$$

que como sabemos tiene por solución distinta de cero

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{10}y\right),\ n = 1, 2, ...$$

donde $\sqrt{-\lambda} = \frac{\pi n}{10}$ o equivalentemente $-\lambda = \left(\frac{\pi n}{10}\right)^2$. Sustituyendo en la otra ecuación tenemos

$$T_n'' + \left(\frac{\pi n}{10}\right)^2 T_n = 0,$$

de donde obtenemos la solución general

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{10}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{10}t\right),$$

de donde planteamos la solución general de la forma

$$\begin{aligned} u(t,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) Y_n(y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{10}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{10}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{10}y\right). \end{aligned}$$

Utilizamos a continuación las condiciones inciales

$$u(0,y) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{10}y\right),$$

de donde inmediatamente todos los coeficientes $A_n = 0$. Utilizando la condición inicial sobre la derivada

$$u_t(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \frac{\pi n}{10} \cos\left(\frac{n\pi}{10}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{10}y\right),$$

de donde

$$u_t(0,y) = \sin(10\pi y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \frac{\pi n}{10}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{10}y\right).$$

Como $\sin(10\pi y)$ ya está como serie de Fourier seno para el valor $n = 100$, tenemos que $B_n = 0$ si $n \geq 100$ y al ser la serie de Fourier única

$$B_{100} 10\pi = 1,$$

de donde

$$B_{100} = \frac{1}{10\pi}.$$

Así, la solución de la ecuación en derivadas parciales es

$$u(t,y) = \frac{1}{10\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{10}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{10}y\right).$$