AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2015/16

EXAMEN FINAL. 14–6–2016

Análisis Complejo

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- No está permitido el uso de calculadora programable.
- Los cálculos deben ser exactos y los ángulos deben expresarse en radianes.
- Todos los cálculos deben ser razonados adecuadamente.
- Entregue la hoja del enunciado.
- Procure empezar cada problema en una cara nueva.

1. Dada la función
$$v(x,y) = -2x^2 + 2y^2 + 6x^2y - 2y^3.$$

   (a) (0.25 puntos) Compruebe que v es armónica.

   (b) (1.25 puntos) Encuentre una función $u\,(x,y)$, para que la función definida por $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea derivable en C y cumpla $f(1+i) = 4i$. Exprese $f'(z)$ en forma binómica.

   Solución:

   a. Para que $v\,(x,y)$ sea una función armónica debe cumplir la ecuación de Laplace
$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \tag{1}$$
   Derivando $v\,(x,y)$
$$\begin{aligned} v_x &= -4x + 12xy \Rightarrow v_{xx} = -4 + 12y \\ v_y &= 4y + 6x^2 - 6y^2 \Rightarrow v_{yy} = 4 - 12y \end{aligned}$$
   comprobamos que efectivamente v cumple la ecuación 1:
$$\underbrace{(-4+12y)}_{u_{xx}} + \underbrace{(4-12y)}_{u_{yy}} = 0.$$

   b. Para el cálculo de $u\,(x,y)$, la parte real de $f\,(x,y)$, tendremos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann:
$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$
   Usando la primera ecuación (aunque esta elección es indiferente para el resultado final):
$$u_x = v_y \Leftrightarrow u_x = 4y + 6x^2 - 6y^2,$$

Integramos respecto a x para obtener $u(x,y)$

$$u(x,y)=\int u_x dx=\int\left(4y+6x^2-6y^2\right)dx=4xy+2x^3-6y^2x+\varphi(y)$$

siendo $\varphi(y)$ constante para y; para encontrar su expresión derivamos $u(x,y)$ respecto de y

$$u_y=4x-12yx+\varphi'(y)$$

y usamos la otra ecuación de Cauchy-Riemann

$$u_y=-v_x\Leftrightarrow 4x-12yx+\varphi'(y)=-(-4x+12xy)\Leftrightarrow 4x-12yx+\varphi'(y)=4x-12xy$$

de donde se deduce que

$$\varphi'(y)=0,$$

e integrando respecto a y se obtiene

$$\varphi(y)=c\in\mathbb{R}.$$

La expresión para $u(x,y)$ será

$$u(x,y)=4xy+2x^3-6y^2x+c,$$

y la función $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$

$$f(x,y)=\left(4xy-6y^2x+2x^3+c\right)+i\left(-2x^2+2y^2+6x^2y-2y^3\right).$$

Notar que si $z=x+iy$, entonces podemos expresar $f(x,y)$ como función de z de la forma (evaluando en $(z,0)$)

$$f(z)=2z^3-i2z^2+c$$

Como $f(1+i)=4i\Leftrightarrow u(x,y)=0$ y $v(x,y)=4$

$$\begin{aligned}u(1,1)&=4-6+2+c=0\Leftrightarrow c=0,\\ v(1,1)&=-2+2+6-2=4,\end{aligned}$$

y la función buscada será

$$f(x,y)=\left(4xy-6y^2x+2x^3\right)+i\left(-2x^2+2y^2+6x^2y-2y^3\right)=2z^3-i2z^2.$$

La expresión para $f'(z)$ en forma binómica se obtiene de la expresión

$$f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)=\left(4y-6y^2+6x^2\right)+i(-4x+12xy).$$

OBSERVCIÓN: Vamos a comprobar que la elección del orden en las ecuaciones de Cauchy-Riemann es indiferente para el cálculo de $u(x,y)$. Elegimos ahora la segunda de estas ecuaciones:

$$u_y=-v_x\Leftrightarrow u_y=-(-4x+12xy),$$

integrando respecto a y, obtenemos $u(x,y)$

$$u(x,y)=\int u_y dy=\int (4x-12xy)\,dy=4xy-6y^2x+\varphi(x)$$

con $\varphi(x)$ constante para x; para encontrar su expresión derivamos $u(x,y)$ respecto de x

$$u_x=4y-6y^2+\varphi'(x)$$

Por la segunda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, esta expresión debe coincidir con $v_y=(4y+6x^2-6y^2)$:

$$4y-6y^2+\varphi'(x)=4y+6x^2-6y^2$$

de donde se deduce que

$$\varphi'(x)=6x^2$$

e integrando respecto a x se obtiene

$$\varphi(x)=2x^3+c\in\mathbb{R}$$

La expresión para $u(x,y)$ será

$$u(x,y)=4xy-6y^2x+2x^3+c$$

que como podemos comprobar es el mismo resultado que el obtenido al empezar por la primera ecuación.

2. (1.25 puntos) Dada la siguiente integral:

$$I(r)=\int_\gamma \frac{z^2-1}{z(z-1)(z-2)^2}dz; \qquad \gamma(t)=re^{it}, t\in[0,2\pi], \quad r>0.$$

Calcule I en función de $r>0$, usando el teorema de los residuos, justificando previamente porqué se puede aplicar dicho teorema.

Solución. El teorema de los residuos se puede aplicar directamente, puesto que la curva es cerrada (circunferencia de centro 0 y radio r, orientada positivamente) y la función del integrando sólo tiene singularidades aisladas que podemos calcular fácilmente:

$$z(z-1)(z-2)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases} z_1=0\\ z_2=1\\ z_3=2\end{cases}$$

Se comprueba que z_1 y z_3 son singularidades tipo polo,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\frac{z^2-1}{z(z-1)(z-2)^2} &= \frac{-1}{0}=\infty\Rightarrow \quad \text{Es tipo polo.}\\
\lim_{z\to 0} z\frac{z^2-1}{z(z-1)(z-2)^2} &= \lim_{z\to 0}\frac{z^2-1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{-1}{(-1)(-4)^2}=\frac{1}{4}\in\mathbb{C}-\{0\}\Rightarrow \text{Orden 1}\\
\lim_{z\to 2}\frac{z^2-1}{z(z-1)(z-2)^2} &= \frac{1}{0}=\infty \quad \text{Es tipo polo.}\\
\lim_{z\to 2}(z-2)^2\frac{z^2-1}{z(z-1)(z-2)^2} &= \lim_{z\to 2}\frac{z^2-1}{z(z-1)}=\frac{3}{2}\in\mathbb{C}-\{0\}\Rightarrow \text{ Orden 2}
\end{aligned}$$

mientras que para z_2 comprobamos que también anula el numerador y si calculamos el límite de la función en ese punto

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{z(z-1)(z-2)^2} &= \frac{0}{0} = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{z\to 1}\frac{\frac{d}{dz}(z^2-1)}{\frac{d}{dz}\left(z(z-1)(z-2)^2\right)}\\
&= \lim_{z\to 1}\frac{2z}{(2z-1)(z-2)^2+2(z^2-z)(z-2)} = 2,
\end{aligned}$$

luego al existir el límite de la función en z_2, este valor es una singularidad evitable y no se tiene en cuenta en el cálculo de la integral puesto que su residuo será 0

El valor de la integral depende de las singularidades que estén dentro de la curva, que es una circunferencia de centro fijo y radio variable $r > 0$. Para ello calculamos la distancia de cada singularidad al centro de la circunferencia

$$\begin{aligned}
z_1 &= 0 \Rightarrow d(0, z_1) = |z_1 - 0| = |0-0| = |0| = 0\\
z_3 &= 2 \Rightarrow d(0, z_3) = |z_3 - 0| = |2-0| = |2| = 2
\end{aligned}$$

La integral depende del radio de r y esto influye en las singularidades que caen dentro. Teniendo en cuenta las distancias que hemos calculado al centro debemos distinguir:

$$\begin{aligned}
0 &< r < 2 \Rightarrow z_1 \in \mathring{\gamma}, z_1 \notin \mathring{\gamma} \Rightarrow I(r) = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0)\\
2 &< r \Rightarrow z_1 \in \mathring{\gamma}, z_2 \in \mathring{\gamma} \Rightarrow I(r) = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f(z), 0) + \operatorname{Res}(f(z), 2)\right)
\end{aligned}$$

Calcularemos ahora los residuos. Como z_1 es simple, el límite que hemos utilizado para conocer el orden del polo también proporciona el residuo, por tanto

$$\operatorname{Res}(f(z), 0) = \frac{1}{4}.$$

Para calcular el residuo en z_2, que es un polo doble, usamos la fórmula general

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f(z), 2) &= \lim_{z\to 2}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}(z-2)^2\frac{z^2-1}{z(z-1)(z-2)^2}\\
&= \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\frac{z^2-1}{z(z-1)} = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\frac{z+1}{z} = \lim_{z\to 2}\frac{z-(z+1)}{z^2} = \frac{-1}{4}.
\end{aligned}$$

La integral será

$$\begin{aligned}
0 &< r < 2 \Rightarrow z_1 \in \mathring{\gamma}, z_1 \notin \mathring{\gamma} \Rightarrow I(r) = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) = 2\pi i\frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}\\
2 &< r \Rightarrow z_1 \in \mathring{\gamma}, z_2 \in \mathring{\gamma} \Rightarrow I(r) = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f(z), 0) + \operatorname{Res}(f(z), 2)\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) = 0
\end{aligned}$$

3. (1.25 puntos) Resuelva el siguiente problema mediante la transformada de Laplace

$$\begin{cases}
y''(t) + y(t) = 1 - h_2(t), \qquad t \geq 0,\\
y(0) = 0,\\
y'(0) = 1.
\end{cases}$$

Solución. Definimos

$$Y(z) = \mathcal{L}[y](z),$$
$$x(t) = 1 - h_2(t).$$

Utilizando las propiedades de linealidad y derivación de la transformada de Laplace:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{L}[y'' + y](z) & = & \mathcal{L}[x(t)](z) \\
 & \Downarrow & \text{(Linealidad)} \\
\mathcal{L}[y''](z) + \mathcal{L}[y](z) & = & \mathcal{L}[x(t)](z) \\
 & \Downarrow & \text{(Derivación)}
\end{array}$$

$$\left(z^2 Y(z) - 1\right) + Y(z) = \mathcal{L}[x(t)](z).$$

Usando las condiciones iniciales:

$$z^2 Y(z) + Y(z) - 1 = \mathcal{L}[x(t)](z).$$

Despejando $Y(z)$

$$\left(z^2 + 1\right) Y(z) = 1 + \mathcal{L}[x(t)](z) \Rightarrow Y(z) = \frac{1 + \mathcal{L}[x(t)](z)}{z^2 + 1}.$$

Calculamos $\mathcal{L}[x(t)](z)$

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{L}[x(t)](z) & = & \mathcal{L}[1 - h_2(t)](z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{e^{-2z}}{z} = \dfrac{1 - e^{-2z}}{z} \\
 & \Downarrow & \text{(Linealidad)} \\
\mathcal{L}[x(t)](z) & = & \mathcal{L}[1](z) - \mathcal{L}[h_2(t)](z) \\
 & \Downarrow & \text{(Función Heaviside)} \\
\mathcal{L}[x(t)](z) & = & \dfrac{1}{z} - \dfrac{e^{-2z}}{z}
\end{array}$$

Sustituyendo en $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{1 + \frac{1}{z} - \frac{e^{-2z}}{z}}{(z^2 + 1)} = \frac{1}{z^2 + 1} + \frac{1}{z(z^2 + 1)} - \frac{e^{-2z}}{z(z^2 + 1)}.$$

Tomando la transformada inversa de Laplace encontraremos la solución $y(t)$. Utilizando linealidad podemos poner

$$\begin{array}{rcl}
y(t) & = & \mathcal{L}^{-1}[Y(z)](t) \\
 & \Downarrow & \\
y(t) & = & \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(z^2 + 1)} + \dfrac{1}{z(z^2 + 1)} - \dfrac{e^{-2z}}{z^2 + 1}\right](t) \\
 & \Downarrow & \text{(Linealidad)} \\
y(t) & = & \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(z^2 + 1)}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{z(z^2 + 1)}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-2z}}{z^2 + 1}\right](t)
\end{array}$$

y si tenemos en cuenta que hay una exponencial en el segundo término, debemos utilizar el segundo teorema de traslación para poner

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^2 + 1)}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2 + 1)}\right](t) - h_2(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2 + 1)}\right](t - 2),$$

Notar que en ambos sumandos se calcula la inversa de la misma función. El cálculo de la primera transformada inversa es directo ya que se trata de la transformada de la función $\operatorname{sen}(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^2+1)}\right](t) = \operatorname{sen}(t)$$

Para el calcular esta inversa vamos a utilizar residuos. Las singularidades son $z_1 = 0$, $z_2 = i$ y $z_3 = -i$, que son todo polos simples; así por la fórmula de Bromwich tenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t) = \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), 0\right) + \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), i\right) + \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), -i\right)$$

Estos residuos se calculan mediante la fórmula general para polos de orden k, en este caso $k = 1$ para todos ellos

$$z_1 = 0 \quad \Rightarrow \operatorname{Res}(e^{zt}F(z), 0) = \lim_{z\to 0} z\,(e^{zt}F(z)) = \lim_{z\to 0} e^{zt}\tfrac{1}{(z^2+1)} = 1$$

$$z_2 = i \quad \Rightarrow \operatorname{Res}(e^{zt}F(z), i) = \lim_{z\to i}(z-i)\,(e^{zt}F(z)) = \lim_{z\to 2} e^{zt}\tfrac{1}{z(z+i)} = e^{it}\tfrac{1}{i(2i)} = -\tfrac{e^{it}}{2}$$

Como $z_3 = -i$ es el conjugado de z_2, su residuo será el conjugado del anterior

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), -i\right) = \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), \bar{i}\right) = \overline{\operatorname{Res}(e^{zt}F(z), i)} = -\frac{e^{-it}}{2}.$$

Sumando todos los residuos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t) = 1 + \left(-\frac{e^{it}}{2}\right) + \left(-\frac{e^{-it}}{2}\right) = 1 - \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = 1 - \cos t.$$

Teniendo en cuenta el primer y tercer término, tinalmente la solución buscada será

$$y(t) = \operatorname{sen}(t) + (1-\cos t) - (1-\cos(t-2))\,h_2(t),$$

o en forma de llave como

$$y(t) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen}(t) - \cos t & 0 \le t \le 2 \\ \operatorname{sen}(t) + \cos(t-2) - \cos t & 2 \le t \end{cases}.$$

Es posible en encontrar la transformada inversa del segundo término mediante descomposición en fracciones simples, ya que

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z^2+1)} &= \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+1}\right](t) = 1 - \cos t. \end{aligned}$$

Podemos comprobar que se cumplen las condiciones iniciales y la ecuación diferencial, para ello necesitamos calcular $y'(t)$ e $y''(t)$:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \cos t + \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(t-2)\,h_2(t), \\ y''(t) &= -\operatorname{sen}(t) + \cos t - \cos(t-2)\,h_2(t). \end{aligned}$$

Comprobamos que se cumplen las condiciones iniciales

$$y(0) = 1 + \operatorname{sen} t - \cos t - (1 - \cos(t-2))\, h_2(t)\big|_{t=0} = 1 + 0 - 1 - (1 - \cos(-2)) \cdot 0 = 0$$

$$y'(0) = \cos t + \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(t-2)\, h_2(t)\big|_{t=0} = 1 + 0 - \operatorname{sen}(-2) \cdot 0 = 0$$

Comprobamos que se cumple la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= (-\operatorname{sen} t + \cos t - \cos(t-2)\, h_2(t)) + (1 + \operatorname{sen} t - \cos t - (1 - \cos(t-2)\, h_2(t))) \\ &= -\operatorname{sen} t + \cos t - \cos(t-2)\, h_2(t) + 1 + \operatorname{sen} t - \cos t - h_2(t) + \cos(t-2)\, h_2(t) \\ &= 1 - h_2(t). \end{aligned}$$

4. (0.5 puntos) Sabiendo que

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2/2}\right](\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$$

calcule

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2/a^2}\right](\omega), \quad a > 0$$

Solución. Para resolver el problema tendremos en cuenta la propiedad de cambio de escala de la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}[f(\lambda x)](\omega) = \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{\omega}{\lambda}\right), \text{ si } \lambda \neq 0$$

En este caso tenemos

$$f(x) = e^{-x^2/2}$$

mientras que

$$f(\lambda x) = e^{-(\lambda x)^2} = e^{-x^2/a^2}$$

de donde sacaremos el factor de cambio de escala

$$-(\lambda x)^2 = -\frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow (\lambda x)^2 = \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{a}.$$

Así que, teniendo en cuenta que además $a > 0$ y por tanto $|a| = afs$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[e^{-x^2/a^2}\right](\omega) &= \mathcal{F}[f(\lambda x)](\omega) = \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|} \mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{\omega}{\frac{1}{a}}\right) = a\mathcal{F}[f(x)](a\omega) = a\sqrt{2\pi} e^{-(a\omega)^2/2}. \end{aligned}$$

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2015/16
EXAMEN FINAL. 14–6–2016
Parte Conjunta

1. **(1 punto)** Explica los diferentes errores que aparecen al aplicar el método de Euler a la ecuación

$$\begin{cases} y' = ty + e^y; \\ y(0) = 2; \end{cases}$$

para obtener el valos aproximado $y(1)$.

Teoría.

2. **(1 punto)** Dada la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + y = t,$$

donde a es un parámetro real, explica de forma razonada qué debe cumplir a para que la solución de la misma para tiempos suficientemente grandes sea

$$y(t) \simeq t - 3.$$

Solución. La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea es

$$t^2 + at + 1 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Como vemos, si $a \geq 2$ tenemos soluciones reales negativas, ya qye $\sqrt{a^2 - 4} < a$. Si $a \in (0, 2)$ tenemos soluciones complejas conjugadas con parte real negativa. Así, es estos casos el sistema será asintóticamente estable. Tomamos ahora la transformada de Laplace, y como podemos considerar que las condiciones iniciales son nulas, la transformada de $y(t)$ sería

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^2(z^2 + az + 1)}.$$

Calculamos la transformada inversa usando la fórmula de inversión compleja aplicada a aquellos valores que no tengan parte real negativa para tiempos suficientemente grandes, es decir

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq Res\left(\frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + az + 1)}, 0\right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \frac{e^{zt}}{(z^2 + az + 1)} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{1!} \frac{te^{zt}(z^2 + az + 1) - e^{zt}(2z + a)}{(z^2 + az + 1)} = t - a. \end{aligned}$$

Como $t - a$ tiene que ser igual a $t - 3$, concluimos que $a = 3$.

3. **(2 puntos)** Resolver el problema

$$\begin{array}{cc} \text{Minimizar} & x + y, \\ \text{Sujeto a} & x^2 + ay^2 \leq 1, \end{array}$$

donde $a > 0$.

Solución. Si $x^2+ay^2 < 1$ no hay restricciones y por tanto todos los puntos son regulares. Si $x^2+ay^2 = 1$, el gradiente es $(2x, 2ay)$ que sólo puede ser linealmente dependiente si $x = y = 0$, pero al no activar el punto $(0,0)$ la restricción, tenemos que todos los puntos son regulares.

Consideramos el Lagrangiano

$$L(x, y, \mu) = x + y + \mu(x^2 + ay^2 - 1),$$

y planteamos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 + 2\mu x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1 + 2\mu a y = 0, \end{aligned}$$

junto con la condición de holgura

$$\mu(x^2 + ay^2 - 1) = 0.$$

Si $\mu = 0$, la primera ecuación quedaría $1 = 0$, lo cual es imposible. Por lo tanto $\mu \neq 0$ y necesariamente

$$x^2 + ay^2 = 1.$$

Despejando en las dos primeras ecuaciones

$$x = -\frac{1}{2\mu};\ y = -\frac{1}{2a\mu}$$

y sustituyendo en la restricción activa obtenemos

$$\frac{1}{4\mu^2} + \frac{1}{4a\mu^2} = 1,$$

de donde

$$\mu = \pm 1\sqrt{\frac{a+1}{4a}}.$$

Como estamos buscando un mínimo, entonces

$$\mu = +\sqrt{\frac{a+1}{4a}};\ x = -\sqrt{\frac{a}{a+1}};\ y = -\sqrt{a(a+1)},$$

que son nuestros candidatos a mínimo. Calculamos el Hessiano

$$HL(x, y, \mu) = \begin{pmatrix} 2\mu & \\ & 2\mu a \end{pmatrix},$$

y particularizando

$$HL(-\sqrt{\frac{a}{a+1}}, -\sqrt{a(a+1)}, \sqrt{\frac{a+1}{4a}}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{a+1}{a}} & \\ & \sqrt{a(a+1)} \end{pmatrix},$$

que claramente es definida positiva, por lo que el punto en cuestión se trata en efecto de un mínimo local.

Nota: Es además mínimo global ya que el conjunto $\{(x, y) : x^2 + ay^2 \leq 1\}$ es compacto y por tanto tal mínimo global existe. Como todos los puntos son regulares y el único mínimo encontrado es el anterior, podemos decir que el mínimo buscado es

$$-\sqrt{\frac{a}{a+1}} - \sqrt{a(a+1)}.$$

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2015/16

Examen final. 16–4–2016

Teoría de Campos

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.

1. **(2 puntos)** Explica como se resuelve la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{yy},\ t > 0,\ y \in (0, L), \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0,\ t > 0, \\ u(0, y) = f(y),\ y \in (0, L), \end{cases}$$

donde $\alpha, L > 0$ y $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ es una función suficientemente regular.

Teoría.

2. **(1.25 puntos)** Dada la cilindro Φ dada por $x^2+y^2 = 9$, $z \in [-1, 1]$ y el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, yz, xz)$, calcular la integral

$$\int\int_{\Phi} Rot(\mathbf{F})dS$$

explicando de forma razonada cómo se realiza el cálculo.

Solución. Calculamos

$$Rot(\mathbf{F}) = (-y, -z, -1)$$

y parametrizamos la superficie como

$$\Phi = \begin{cases} x = 3\cos u, \\ y = 3\sin u, \\ z = v, \\ (u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1]. \end{cases}$$

El vector normal

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = (3\cos u, 3\sin u, 0),$$

es decir, con orientación exterior. Entonces

$$\begin{aligned} \int\int_{\Phi} Rot(\mathbf{F})dS &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \langle(-3\sin u, v, -1), (3\cos u, 3\sin u, 0)\rangle\, dudv \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} (-9\cos u\sin u + 3v\sin u)dudv = 0. \end{aligned}$$

3. **(1.25 puntos)** Calcular de forma razonada el trabajo

$$\int_{\gamma} (x^2 + e^{\cos y})dy,$$

donde γ es la curva formada por la unión del segmento de recta que une los puntos $(-1,0)$ con $(1,0)$, el arco de circunferencia de radio 1 y centro $(0,0)$ que une $(1,0)$ con $(0,1)$, y el segmento de recta que une $(0,1)$ con $(-1,0)$.

Solución. Al tratarse de una curva de Jordan orientada positivamente, y ser el campo de clase C^∞, podemos aplicar el Teorema de Green

$$\int_\gamma (x^2 + e^{\cos y})dy = \int\int_{I(\gamma)} 2xdydx.$$

El interior de la curva $I(\gamma)$ está formado por el triángulo T de vértices $(-1,0)$, $(0,0)$ y $(0,1)$, y el sector circular C de radio 1 comprendido en el primer cuadrante. entonces

$$\begin{aligned}
\int\int_{I(\gamma)} 2xdydx &= \int\int_T 2xdydx + \int\int_C 2xdydx \\
&= \int_{-1}^{0}\int_0^{1-x} 2xdydx + \int_0^{\pi/2}\int_0^1 2r^2\cos\varphi drd\varphi \\
&= \int_{-1}^{0} 2x(1-x)dx + \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = -1,
\end{aligned}$$

donde hemos usado coordenadas polares para el cálculo de la integral doble sobre C.