Capítulo 3

Integración en $\mathbb{C}$

3.1. Curvas en el plano complejo

Definición 3.1 *Definimos* curva compleja o curva *en el plano complejo a una función compleja de variable real definida sobre un intervalo* $[a,b] \subset \mathbb{R}$

$$\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Para cada $t \in [a,b] \Rightarrow \gamma(t) \in \mathbb{C}$.

El valor $\gamma(a)$ *es el* ***origen*** *de la curva y el valor* $\gamma(b)$ *es el* ***extremo*** *de la misma.*

Como $\gamma(t) \in \mathbb{C}$, entonces tendrá parte real e imaginaria que dependerán de la variable t; así podremos escribir

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t),$$

siendo $x(t)$, $y(t)$ dos funciones reales de variable real definidas sobre el intervalo compacto $[a,b]$

$$x, y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ejemplo 3.1 *Las siguientes funciones son curvas en* $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= t + it, \qquad t \in [0,1]; \quad \text{con } x(t) = t \text{ e } y(t) = t, \\ \gamma(t) &= t + it^2, \qquad t \in [0,1]; \quad \text{con } x(t) = t \text{ e } y(t) = t^2. \end{aligned}$$

Cuando t recorre el intervalo de a hasta b, se van obteniendo números complejos, que podemos representar en $\mathbb{R}^2$, además el orden de aparición de estos puntos nos indica el **sentido** de representación de la curva.

De la definición de parte real e imaginaria de una curva compleja se deduce que $x(t)$ e $y(t)$ están relacionadas entre sí a través de la variable t. En ocasiones esta relación se establece de forma explícita entre x e y; por ejemplo, para las curvas del ejemplo anterior tenemos

$$\gamma(t) = t + it \Longrightarrow x(t) = t \text{ e } y(t) = t \Longrightarrow y = x,$$

Figura 3.1: Representación de las curvas anteriores

$$\gamma(t) = t + it^2 \Longrightarrow x(t) = t \text{ e } y(t) = t^2 \Longrightarrow y = x^2.$$

En otros casos esta relación es implícita, como en la curva

$$\gamma(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t,$$

aquí se cumple la relación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Notar que para definir una curva es necesario dar la expresión de $\gamma(t)$ y el intervalo donde está definida, las curvas

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= t + it, \quad t \in [0,1], \\
\gamma_2(t) &= t + it, \quad t \in [0,2], \\
\gamma_3(t) &= t + it^2, \quad t \in [0,1],
\end{aligned}$$

Figura 3.2: Diferencia entre curva (con flecha) y rango (sin flecha).

son distintas dos a dos, bien por que la expresión de la curva en términos de t es distinta como ocurre entre γ_1 y γ_3, o bien por el intervalo donde está definida dicha variable como ocurre entre γ_1 y γ_2.

Definición 3.2 *Dada una curva en* $\mathbb{C}$, *definimos su* rango o imagen *como el conjunto de números complejos que se obtiene cuando* t *recorre el intervalo* $[a, b]$

$$\gamma^* = \{\gamma(t) \in \mathbb{C} : t \in [a, b]\}.$$

Observemos las siguientes curvas

$$\gamma_1(t) = t + it, \quad t \in [0, 1],$$

$$\gamma_2(t) = (t - 1) + i(t - 1), \quad t \in [1, 2],$$

está claro que son curvas distintas puesto que tanto la expresión como el intervalo son distintos, sin embargo, el conjunto de puntos que se generan al recorrer la variable t cada uno de los intervalos en cada caso es el mismo y en el mismo sentido, en este caso se dice que las curvas son *equivalentes*.

Definición 3.3 *Dos curvas* $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ *y* $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ *se dice que son* equivalentes *y se expresa como* $\gamma_1 \sim \gamma_2$*, si y sólo si existe una función* $\phi : [a,b] \to [c,d]$*, llamada función de* reparametrización, *derivable y con* $\phi'(t) \geq 0$ *para* $t \in [a,b]$ *de forma que*

$$(\gamma_2 \circ \phi)(t) = \gamma_1(t) \ \ \textit{para } t$$

Se puede comprobar que $\gamma_2^* = \gamma_1^*$*. En este caso se dice que* γ_1 *y* γ_2 *son dos parametrizaciones de la misma curva.*

Ejemplo 3.2 *Para las funciones* γ_1 *y* γ_2 *encontramos* $\phi(t) = t+1$*, con* $\phi'(t) = 1 > 0$.

Definición 3.4 *Dados* z_1*,* $z_2 \in \mathbb{C}$*, definimos el* segmento rectilíneo de origen z_1 *y* extremo z_2*, a la curva en* $\mathbb{C}$*, definida por*

$$\gamma_{[z_1,z_2]}(t) = (1-t)z_1 + tz_2 \qquad t \in [0,1],$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \gamma_{[z_1,z_2]}(0) &= z_1 \\ \gamma_{[z_1,z_2]}(1) &= z_2 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3 *Encuentra el segmento rectilíneo que une el complejo* $z_1 = 1+i$ *con el complejo* $z_2 = i$

Solución: Utilizando la fórmula anterior

$$\gamma_{[1+i,i]}(t) = (1-t)z_1 + tz_2 = (1-t)(1+i) + it, \qquad t \in [0,1],$$

o agrupando

$$\gamma_{[1+i,i]}(t) = (1-t) + i, \qquad t \in [0,1].$$

Definición 3.5 *Definimos circunferencia de centro* z_0 *y radio* $r \geq 0$ *a la curva en* $\mathbb{C}$ *definida como*

$$c(t) = z_0 + re^{it}, \qquad t \in [0,2\pi].$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Euler y tomando $z_0 = x_0 + iy_0$*, se obtiene*

$$c(t) = (x_0 + r\cos t) + i(y_0 + r\,\mathrm{sen}\,t), \qquad t \in [0,2\pi].$$

Notar también que una semicircunferencia estará definida por

$$sc(t) = (x_0 + r\cos t) + i(y_0 + r\,\mathrm{sen}\,t), \qquad t \in [0,\pi].$$

Definición 3.6 *Definimos elipse de centro* z_0 *y semiejes* $a,b > 0$*, a la curva en* $\mathbb{C}$ *definida por*

$$\gamma(t) = z_0 + (a\cos t + ib\,\mathrm{sen}\,t), \qquad t \in [0,2\pi].$$

Definición 3.7 *Dada la curva $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ con $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Diremos:*

1. γ *es continua, si y sólo si, x y y son funciones continuas como funciones reales de variable real. En este caso γ^* es compacto por ser la imagen de un conjunto compacto mediante una aplicación continua.*

2. γ *es* cerrada $\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$.

3. γ *es* simple o de Jordan $\Leftrightarrow \gamma(t)$ *es inyectiva, es decir,* $\gamma(t_i) \neq \gamma(t_j)$, $\forall t_i, t_j \in (a,b)$ *con $t_i \neq t_j$, es decir la curva no se corta a sí misma, salvo a lo sumo los extremos del intervalo.*

4. γ *es* diferenciable, *si y sólo si, x y y son funciones derivables como funciones reales de variable real. En este caso*
$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t), \qquad t \in [a,b].$$

5. γ *es* regular, *si y sólo si, γ es diferenciable con γ' continua y no nula en todo punto de $t \in [a,b]$.*

6. γ *es* continua a trozos, *si y sólo si, existe una partición del intervalo*
$$P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\},$$
tal que $\gamma(t) \in \mathcal{C}(]t_k, t_{k+1}[)$ para $k = 1, \ldots, t_{n-1}$ y existen los límites laterales en cada $t_k \in (a,b)$
$$\lim_{t \to t_k^-} \gamma(t),$$
$$\lim_{t \to t_k^+} \gamma(t),$$
y en los extremos a y b también existen los límites
$$\lim_{t \to a^+} \gamma(t),$$
$$\lim_{t \to b^-} \gamma(t).$$

7. γ *es* diferenciable a trozos, *si y sólo si, existe una partición del intervalo*
$$P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\},$$
tal que $\gamma(t) \in \mathcal{C}^1(]t_k, t_{k+1}[)$ para $k = 1, \ldots, t_{n-1}$ y existen los límites laterales en cada t_k
$$\lim_{t \to t_k^-} \gamma(t)$$
$$\lim_{t \to t_k^+} \gamma(t)$$

y en los extremos a y b también existen los límites

$$\lim_{t\to a^+} \gamma(t),$$

$$\lim_{t\to b^-} \gamma(t).$$

8. γ regular a trozos *si y sólo si, γ es diferenciable a trozos con γ' continua y no nula en todo punto de $t \in [a,b]$.*

Ejemplo 3.4 *Daremos a continuación ejemplos de curvas (arcos de curva):*

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} t+it, & t\in[0,1] \\ t+i, & t\in[1,2] \end{cases},$$

$$\gamma_2(t) = e^{it}, \qquad t\in[0,2\pi],$$

$$\gamma_3(t) = e^{-it}, \qquad t\in[0,2\pi],$$

$$\gamma_2(t) = e^{2it}, \qquad t\in[0,2\pi].$$

Definición 3.8 *Dada la curva en el cuerpo complejo $\gamma:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ con $\gamma(t) = x(t)+iy(t)$ y $\gamma(t)$ derivable, definimos la* longitud de una curva *al valor de la integral*

$$L(\gamma(t)) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

*Si $L(\gamma(t))<\infty$ entonces la curva se dice que es **rectificable**.*

En el caso de que $\gamma(t)$ sea diferenciable a trozos su longitud estaría definida como

$$L(\gamma(t)) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\gamma'(t)|\,dt$$

siendo

$$P = \{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\},$$

la partición de $[a,b]$ donde $\gamma(t)$ está definida.

Definición 3.9 *Dada la curva en el cuerpo complejo $\gamma:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, definimos el* arco o curva opuesta *a la curva definida por*

$$\begin{aligned} \gamma^C &: [a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C} \\ \gamma^C(t) &= \gamma(a+b-t) \end{aligned}$$

Observación 3.1 *Una curva equivalente a la anterior viene dada por la curva*

$$\begin{aligned} \gamma_A^C &: [-b,-a] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \gamma_A^C(t) &= \gamma(-t) \end{aligned}$$

Definición 3.10 *Dadas* $\gamma_1 : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *y* $\gamma_2 : [c,d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*, dos curvas en el plano complejo con* $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$*, podemos definir la* curva unión *como*

$$\gamma_1 \sqcup \gamma_2 : [a, b+d-c] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C},$$

definida por

$$(\gamma_1 \sqcup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t-b+c) & t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Se puede comprobar que

$$(\gamma_1 \sqcup \gamma_2)^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$$

Ejemplo 3.5 *Poner ejemplo de unión de curvas.*

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \cos t + i \operatorname{sen} t, t \in [0,\pi] \\ \gamma_2(t) &= 2t-1, t \in [0,1] \end{aligned}$$

Definición 3.11 *Si* $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *es una curva cerrada, entonces* γ^* *divide al plano complejo es dos subconjuntos. El* ***interior*** $\mathring{\gamma}$ *que está acotado, y el* ***exterior*** $C - \mathring{\gamma}$ *que es un conjunto no acotado.*

Definición 3.12 *Sea* $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *es una curva cerrada simple, diremos que* γ *está orientada en* ***sentido positivo*** *o directo, si y sólo si, al recorrer la curva el interior queda a la izquierda del recorrido. En caso contrario* γ *estará orientada en sentido negativo o inverso.*

Observación 3.2 *Recordemos que un conjunto de* C*, es conexo, si y sólo si cualquier par de puntos dentro del conjunto pueden unirse mediante una poligonal que une los dos puntos y está dentro del conjunto.*

Definición 3.13 *Un conjunto conexo* S *de* C *es símplemente conexo, si y sólo si su complementario es conexo. En caso contrario se dice que es múltiplemente conexo.*

Proposición 3.1 *Si* $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *son dos curvas complejas derivables, entonces se cumple:*

1. *Si* $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(z_0\gamma_1(t)\right) &= \frac{d}{dt}\left(\left(x_0+iy_0\right)\left(x(t)+iy(t)\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\left(x_0x(t)-y_0y(t)\right)+i\left(x_0x(t)+y_0y(t)\right)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(x_0x(t)-y_0y(t)\right)+i\frac{d}{dt}\left(x_0y(t)+y_0x(t)\right) \\
&= x_0x'(t)-y_0y'(t)+i\left(x_0y'(t)+y_0x'(t)\right) \\
&= \left(x_0+iy_0\right)\left(x'(t)+iy'(t)\right) = z_0x'(t)
\end{aligned}$$

2. *Se cumple* γ_1 *y* γ_2, *entonces*

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1+\gamma_2\right) = \gamma_1' + \gamma_2'$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1\cdot\gamma_2\right) = \gamma_1'\cdot\gamma_2 + \gamma_1\cdot v_2'$$

3. *Si* $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{z_0t}\right) = z_0e^{z_0t}$$

El teorema anterior garantiza que la derivada de una curva funciona sobre las operaciones según las reglas usuales de la derivación.

Pero no todas las reglas de cálculo funcionan para este tipo de derivadas. Por ejemplo, supongamos $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\gamma(t) \in \mathcal{C}([a,b])$, es decir $x, y \in \mathcal{C}([a,b])$. Puede suceder que aunque $\exists\gamma'(t)$ en (a,b) no se cumpla el teorema del valor medio para la derivada, es decir, no es necesariamente cierto que $\exists\xi \in (a,b)$ tal que se cumpla

$$\gamma'(\xi)(b-a) = \gamma(b) - \gamma(a)$$

por ejemplo, si tomamos

$$\gamma(t) = e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

está claro que

$$\gamma'(t) = ie^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

que siempre es $\neq 0$, sin embargo

$$\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 0.$$

3.2. Integración de curvas

Definición 3.14 *Dada la curva en el plano complejo* $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *con* $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, *diremos que* γ *es integrable sobre* $[a,b]$ *si y sólo si* $x(t)$ *e* $y(t)$ *son integrables en* $[a,b]$ *como funciones reales de variable real y en este caso definimos la integración de la curva sobre el intervalo* $[a,b]$ *a*

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt,$$

es decir

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\int_a^b \gamma(t)\,dt\right) &= \int_a^b \mathrm{Re}\,\gamma(t)\,dt, \\ \mathrm{Im}\left(\int_a^b \gamma(t)\,dt\right) &= \int_a^b \mathrm{Im}\,\gamma(t)\,dt. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6

$$\int_0^1 (1+it)^2\,dt = \int_0^1 \left(1-t^2\right)dt + i\int_0^1 2t dt = \frac{2}{3} + i$$

De forma similar se definen las integrales impropias sobre intervalos no acotados.

Proposición 3.2 *La integración de curvas complejas tiene las siguientes propiedades:*

1. *Para cualquier* $c \in (a,b)$
$$\int_a^b \gamma(t)\,dt = \int_a^c \gamma(t)\,dt + \int_c^b \gamma(t)\,dt$$
2. *Si* $z_0 \in \mathbb{C}$, *entonces*
$$\int_a^b z_0\gamma(t)\,dt = z_0\int_a^b \gamma(t)\,dt$$
3. *Para el módulo de* $\gamma(t)$
$$\left|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |\gamma(t)|\,dt$$

Proposición 3.3 *Dadas* γ_1 *y* γ_2 *dos curva en el cuerpo complejo definidas en* $[a,b]$

$$\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

entonces se cumple

$$\int_a^b (\gamma_1(t) + \gamma_2(t))\,dt = \int_a^b \gamma_1(t)\,dt + \int_a^b \gamma_2(t)\,dt$$

Definición 3.15 *Dada* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$*, diremos que la curva* $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *es una* primitiva de $\gamma \Leftrightarrow \Gamma' (t) = \gamma (t)$.

Teorema 3.4 (Regla de Barrow) *Sea* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$*, y supongamos que* γ *es integrable y que existe* $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$*, primitiva de* $\gamma \Rightarrow$

$$\int_a^b \gamma (t)\, dt = \Gamma (b) - \Gamma (b)$$

Ejemplo 3.7 *Calcula* $\int_0^\pi e^{it} dt$

Solución: La función $\Gamma (t) = \frac{1}{i} e^{it}$ es una primitiva de $\gamma (t) = e^{it}$, por la Regla de Barrow

$$\int_0^\pi e^{it} dt = \frac{1}{i} e^{it} \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{i} \left[e^{i\pi} - e^{i0} \right] = \frac{1}{i} [-1 - 1] = -\frac{2}{i} = 2i$$

3.3. Integración sobre curvas o integrales de contorno

Estudiaremos a continuación las integrales de funciones complejas $f (z)$, que definiremos en términos de los valores de $f (z)$ a lo largo de una curva dada $\gamma (t)$, que va desde un punto z_1 hasta otro punto z_2 de $\mathbb{C}$. Son por tanto integrales de línea y los valores van a depender, en general, de la curva γ (y obviamente de f).

La notación utilizada será

$$\int_\gamma f (z)\, dz \text{ o } \int_{z_1}^{z_2} f (z)\, dz$$

Normalmente la última notación se utiliza cuando el valor de la integral es independiente de la elección de la curva entre z_1 y z_2 y aunque estas integrales puedan definirse directamente como límites de sumas, es más sencillo definirlas como integrales curvilíneas de funciones reales.

Definición 3.16 *Sean* $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función compleja de variable compleja definida en* D *y sea* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *una curva regular con* $\gamma^* \subset D$ *de forma que* $f (z) \in \mathcal{C} (\gamma^*)$*. Se define la* integral de la función $f (z)$ a lo largo de la curva γ *o integral de contorno de* f *sobre* γ *a*

$$\int_\gamma f (z)\, dz = \int_a^b f (\gamma (t))\, \gamma' (t)\, dt,$$

donde

$$\gamma' (t) = x' (t) + iy' (t).$$

Observación 3.3 *Si* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *es regular a trozos, entonces*

$$\int_\gamma f (z)\, dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f (\gamma (t))\, \gamma' (t)\, dt.$$

siendo

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

la partición del intervalo asociada a la diferenciabilidad a trozos de γ.

Ejemplo 3.8 *Calcula la siguiente integral*

$$\int_\gamma z^2 dz$$

siendo

1. $\gamma(t)$ *el segmento que une el complejo $z_1 = 0$ con $z_2 = 1 + i$.*
2. $\gamma(t)$ *el arco de curva $y = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 1$.*

Solución: En cada caso encontraremos una parametrización para la curva y utilizaremos la definición dada para integral a lo largo de una curva.

1. Construimos el segmento rectilíneo

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (1-t) z_1 + t z_2 = t(1+i); \qquad t \in [0,1] \\ \gamma'(t) &= 1 + i; \qquad t \in [0,1] \end{aligned}$$

La composición de f con γ nos da

$$f(\gamma(t)) = (t + it)^2 = (1+i)^2 t^2$$

y el valor de la integral será

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (1+i)^2 t^2 (1+i)\,dt = (1+i)^3 \int_0^1 t^2 dt = 2(-1+i) \left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{3}(-1+$$

2. Para el arco de curva tomando $x(t) = t$ se obtiene $y(t) = t^3$ y las ecuaciones para γ y su derivada γ' son

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= t + it^3 \qquad t \in [0,1] \\ \gamma'(t) &= 1 + i3t^2 \qquad t \in [0,1] \end{aligned}$$

La composición de f con γ nos da

$$f(\gamma(t)) = \left(t + it^3\right)^2$$

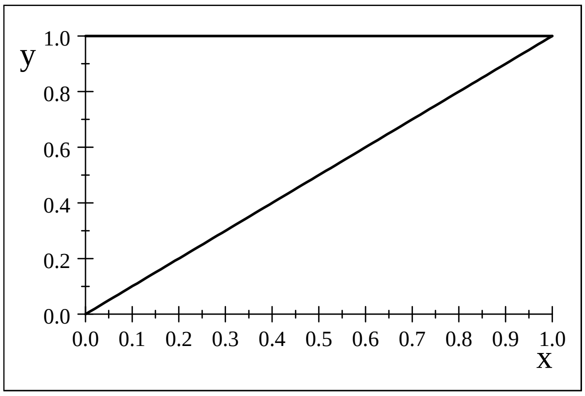
y el valor de la integral será

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(t)} f(z)\,dz &= \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \left(t + it^3\right)^2 \left(1 + i3t^2\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(t^2 - 7t^6 + 5it^4 - 3it^8\right) dt = \frac{t^3}{3} - t^7 + it^5 - i\left.\frac{t^9}{3}\right|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{3} - 1 + i - i\frac{1}{3} = \frac{2}{3}(-1+i) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.9 *Calcula*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \qquad \gamma(t) = \gamma_1(t) \sqcup \gamma_2(t) \sqcup \gamma_3(t) \qquad t \in [0,1]$$

siendo $f(z) = y - x - i3x^2$ *y* γ *la curva de la figura.*



$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= t + it \qquad t \in [0,1] \\
\gamma_2(t) &= (1-t) + i \qquad t \in [0,1] \\
\gamma_3(t) &= i(1-t) \qquad t \in [0,1]
\end{aligned}$$

Solución: γ es una curva regular a trozos, por tanto se cumple

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$$

Expresamos la función del integrando en términos de z,

$$f(z) = y - x - i3x^2 = \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z - i3(\operatorname{Re} z)^2.$$

Necesitamos la derivada de cada una de las curvas

$$\begin{aligned}
\gamma_1'(t) &= 1 + i \qquad t \in [0,1] \\
\gamma_2'(t) &= -1 \qquad t \in [0,1] \\
\gamma_3(t) &= -i \qquad t \in [0,1]
\end{aligned}$$

Ahora calculamos cada integral por separado

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1(t)} f(z)\,dz &= \int_0^1 f(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,dt = \int_0^1 \left(\operatorname{Im}\gamma_1(t) - \operatorname{Re}\gamma_1(t) - i3(\operatorname{Re}\gamma_1(t))^2\right)\gamma_1'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \left(t - t - i3t^2\right)(1+i)\,dt = -3i(1+i)\int_0^1 t^2 dt = -3i(1+i)\left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=0}^{t=1} = -i(1+i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2(t)} f(z)\,dz &= \int_0^1 f(\gamma_2(t))\,\gamma_2'(t)\,dt = \int_0^1 \left(\operatorname{Im}\gamma_1(t) - \operatorname{Re}\gamma_1(t) - i3(\operatorname{Re}\gamma_1(t))^2\right)\gamma_2'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \left(1 - t - i3t^2\right)(-1)\,dt = -1\left.\left(t - \frac{t^2}{2} - i3\frac{t^3}{3}\right)\right|_{t=0}^{t=1} = -\frac{1}{2} + i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2(t)} f(z)\,dz &= \int_0^1 f(\gamma_3(t))\,\gamma_3'(t)\,dt = \int_0^1 \left(\operatorname{Im}\gamma_1(t) - \operatorname{Re}\gamma_1(t) - i3(\operatorname{Re}\gamma_1(t))^2\right)\gamma_3(t)\,dt \\ &= \int_0^1 (1-t)(-i)\,dt = i\left.\frac{(1-t)^2}{2}\right|_{t=0}^{t=1} = -\frac{i}{2},\end{aligned}$$

y el valor total de la integral será la suma de los valores anteriores:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = (-i(1+i)) + \left(-\frac{1}{2} + i\right) + \left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3.10 *Calcula*

$$\int_\gamma z dz; \qquad \gamma(t) = t + it, \qquad t \in [0,1]$$

Solución: Calculamos $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = 1 + i$$

La composición de f con γ nos da

$$f(z) = z \Rightarrow f(\gamma(t)) = f(t + it) = t + it$$

y utilizando la definición de integral a lo largo de una curva obtenemos

$$\int_\gamma z dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (t + it)(1+i)\,dt = \int_0^1 t(1+i)^2\,dt = (1+i)^2\int_0^1 t dt = 2i\left.\frac{t^2}{2}\right|_{t=0}^{t=1} = i$$

Ejemplo 3.11 *Calcula*

$$\int_\gamma \overline{z} dz; \qquad \gamma(t) = t + it \qquad t \in [0,1]$$

Solución: Calculamos $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = 1 + i$$

por tanto utilizando la definición de integral a lo largo de una curva obtenemos

$$f(z) = \overline{z} \Rightarrow f(\gamma(t)) = f(t + it) = \overline{t + it} = t - it = t(1 - i)$$

y sustituyendo

$$\int_\gamma \overline{z}dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 t(1-i)(1+i)\,dt = \int_0^1 t2dt = 2\int_0^1 tdt = 2\left.\frac{t^2}{2}\right|_{t=0}^{t=1} = 1$$

Ejemplo 3.12 *Calcula*

$$\int_\gamma \overline{z}dz \qquad \gamma(t) = t + it^2 \qquad t \in [0,1]$$

Solución: Calculamos $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = 1 + i2t$$

por tanto utilizando la definición de integral a lo largo de una curva obtenemos

$$f(z) = \overline{z} \Rightarrow f(\gamma(t)) = f(t + it) = \overline{t + it^2} = t - it^2$$

y sustituyendo

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}dz &= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \left(t - it^2\right)(1 + i2t)\,dt = \int_0^1 \left(t + 2t^3\right) + it^2dt \\ &= \left(\frac{t^2}{2} + \frac{2t^4}{4}\right) + i\left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=0}^{t=1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{i}{3} = 1 + \frac{i}{3}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.13 *Calcula*

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz \qquad \gamma(t) = e^{it} \qquad t \in [0,2\pi]$$

Solución: Calculamos $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = ie^{it}$$

por tanto utilizando la definición de integral a lo largo de una curva obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow f(\gamma(t)) = f\left(e^{it}\right) = \frac{1}{e^{it}}$$

y sustituyendo

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\left(ie^{it}\right)dt = \int_0^{2\pi} idt = it|_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi i$$

Ejemplo 3.14 *Calcula*

$$\int_\gamma \overline{z}dz \qquad \gamma(t) = 2e^{it} \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Solución: Calculamos $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = 2ie^{it}$$

por tanto utilizando la definición de integral a lo largo de una curva obtenemos

$$f(z) = \overline{z} \Rightarrow f(\gamma(t)) = f\left(2e^{it}\right) = 2e^{-it}$$

y sustituyendo

$$\int_\gamma \overline{z}dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2e^{-it}\right)\left(2ie^{it}\right)dt = 4i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = 4i\ t\big|_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = 4\pi i$$

Notar que si z está en el círculo de radio 2, entonces

$$z \cdot \overline{z} = 4 \Rightarrow \overline{z} = \frac{4}{z}$$

y por tanto

$$\int_\gamma \overline{z}dz = \int_\gamma \frac{4}{z}dz = 4\pi i \Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}dz = \pi i$$

Ejemplo 3.15 *Calcula*

$$\int_\gamma z^{1/2}dz \qquad \gamma(t) = 3e^{it} \qquad t \in [0, \pi]$$

Solución: Calculamos $\gamma'(t)$

$$\gamma'(t) = 3ie^{it},$$

y utilizando la definición de integral a lo largo de una curva obtenemos

$$f(z) = z^{1/2} \Rightarrow f(\gamma(t)) = f\left(3ie^{it}\right) = \sqrt{3}e^{it/2},$$

utilizando la definición de integral de contorno

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^{1/2}dz &= \int_0^\pi f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{3}e^{it/2}3ie^{it}dt \\ &= \int_0^\pi 3\sqrt{3}ie^{i3t/2}dt = 2\sqrt{3}e^{i3t/2}\Big|_{t=0}^{t=\pi} = -2\sqrt{3}i - 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3}(1+i)\end{aligned}$$

Podríamos utilizar una primitiva de $z^{1/2}$, pero como la función $z^{1/2}$ es multivaluada, tenemos que tomar una de las ramas

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \quad r > 0, \theta \in (0, 2\pi)$$

Como la curva es una semicircunferencia situada en el semiplano complejo superior, podremos coger aquella rama definida sobre $H_{\pi/2}$

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^{1/2}dz &= \left.\frac{z^{1/2+1}}{1/2+1}\right|_{z=3}^{z=-3} = \left.\frac{2}{3}z^{3/2}\right|_{z=3}^{z=-3} = \left.\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}L_{\pi/2}(z)}\right|_{z=3}^{z=-3} \\ &= \frac{2}{3}\left(e^{\frac{3}{2}L_{\pi/2}(-3)} - e^{\frac{3}{2}L_{\pi/2}(3)}\right) = \frac{2}{3}\left(e^{\frac{3}{2}(\ln 3+i\pi)} - e^{\frac{3}{2}(\ln 3)}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(e^{\frac{3}{2}\ln(3)}e^{i3\pi/2} - e^{\frac{3}{2}\ln(3)}\right) = \frac{2}{3}\left(-i3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right) = -2\sqrt{3}\,(1+i)\end{aligned}$$

tal y como hemos deducido antes. Si elegimos en este caso la rama incorrecta el resultado variará.

Teorema 3.5 *Sea $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$, dos curvas diferenciables con $\gamma_1 \sim \gamma_2$ y con ϕ la función de reparametrización. Entonces para toda $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $f(z) \in \mathcal{C}(D)$ y $\gamma_1^* \subseteq D$ se cumple*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Proposición 3.6 *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ curva diferenciable a trozos y sea γ^C su curva opuesta. Entonces para toda $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $f(z) \in \mathcal{C}(D)$ y $\gamma^* \subseteq D$, ocurre*

$$\int_{\gamma^C} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Proposición 3.7 *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ curva regular. Entonces para toda $f, g : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $f(z), g(z) \in \mathcal{C}(\gamma^*)$ y $\forall z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\int_\gamma z_1 f(z) + z_2 g(z)\,dz = z_1\int_\gamma f(z)\,dz + z_2\int_\gamma g(z)\,dz \qquad \textit{(linealidad)}$$

Proposición 3.8 *Sea $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$, dos curvas regulares con $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Entonces para toda $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $f(z) \in \mathcal{C}(\gamma_1^* \cup \gamma_2^*)$ entonces*

$$\int_{\gamma_1 \sqcup \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Proposición 3.9 (Desigualdad ML) *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ curva regular de longitud finita. Entonces para toda $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $f(z) \in \mathcal{C}(\gamma^*)$ entonces*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq ML$$

siendo

$$M = \sup\{|f(z)| : z \in \gamma^*\}$$

Ejemplo 3.16 *Demuestra que si* $\gamma(t) = 3e^{it}$ *con* $t \in [0, \pi]$ *y si* $f(z) = z^{1/2}$ *entonces*

$$\left| \int_\gamma \frac{z^{1/2}}{|z^2+1|} dz \right| \leq \frac{3\sqrt{3}\pi}{8}$$

Solución: Dado $z \in \gamma^*$, entonces

$$|z| = 3 \Rightarrow \left| z^{1/2} \right| = |z|^{1/2} = \sqrt{3}$$

además por la desigualdad triangular inversa

$$\left| z^2 + 1 \right| \geq \left| \left| z^2 \right| - 1 \right| = \left| |z|^2 - 1 \right| = \left| 3^2 - 1 \right| = 8$$

de donde se deduce que

$$\left| \frac{z^{1/2}}{|z^2+1|} \right| = \frac{\left| z^{1/2} \right|}{\left| |z^2+1| \right|} = \frac{\sqrt{3}}{|z^2+1|} \leq \frac{\sqrt{3}}{8} = M$$

Utilizando la longitud del contorno (que es una semicircunferencia de radio 3)

$$L(\gamma(t)) = \int_0^\pi \left| \gamma'(t) \right| dt = \int_0^\pi \left| 3ie^{it} \right| dt = \int_0^\pi 3dt = 3\pi$$

y utilizando la proposición anterior obtenemos la desigualdad buscada

$$\left| \int_\gamma \frac{z^{1/2}}{|z^2+1|} dz \right| \leq ML = \frac{\sqrt{3}}{8} 3\pi$$

Proposición 3.10

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z)\, dz \right| \leq \int_{\gamma_1} |f(z)|\, dz$$

Definición 3.17 *Dada una función compleja*

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

con D *dominio simplemente conexo. Diremos que* $F(z) \in \mathcal{H}(D)$ *es una primitiva (o integral indefinida) de* $f(z)$ *en* D*, si y sólo si,* $F'(z) = f(z)\ \forall z \in D$*.*

Ejemplo 3.17 *La función* $f(z) = z$ *tiene como primitiva a* $F(z) = z^2/2$*.*

Proposición 3.11 *Sea* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *una curva regular y sea* $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función compleja de variable compleja con* D *dominio símplemente conexo. Supongamos que* $\gamma^* \subseteq D$ *y* $f(z) \in \mathcal{H}(D)$ *entonces*

$$\int_\gamma f'(z)\, dz = f[\gamma(b)] - f[\gamma(a)]$$

Teorema 3.12 (Regla Barrow) *Sea $\gamma : [a,b] \to C$, una curva regular y sea $f : D \subset C \to C$ una función compleja de variable compleja con D dominio símplemente conexo. Supongamos que existe $F(z)$, primitiva de f en D y que $\gamma^* \subseteq D$, entonces*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F[\gamma(b)] - F[\gamma(a)]$$

a integral no depende de la curva que uno dos puntos.

Ejemplo 3.18 *Calcula*

$$\int_\gamma z dz \qquad \gamma(t) = t + it \qquad t \in [0,1]$$

Solución: La función $f(z) = z$ tiene como primitiva a $F(z) = \frac{z^2}{2}$, utilizando la regla de Barrow

$$\int_\gamma z dz = F[\gamma(1)] - F[\gamma(0)] = F[1+i] - F[0] = \frac{(1+i)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = i$$

De este resultado se desprende que si una función f continua tiene primitiva F en un Dominio D, el valor de la integral curvilínea de f desde $z_1 \in D$ hasta $z_2 \in D$ es independiente del camino elegido, más concretamente, de la curva regular que se considere supuesto que está enteramente contenida en D.

Teorema 3.13 (Independencia del camino) *Dada una función compleja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con D dominio símplemente conexo; son equivalentes:*

1. Las integrales son independientes del camino: *Si $z_1, z_2 \in D$ y γ_1, γ_2 son dos curvas con $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq D$ que unen z_1 con z_2 entonces*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

2. Las integrales a lo largo de curvas cerradas se anulan: *Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ curva cerrada y diferenciable a trozos con $\gamma^* \subseteq D \Rightarrow$*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

3. Existe primitiva de $f(z)$ en D: *Existe una función $F : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $F(z) \in \mathcal{H}(D)$ tal que $F'(z) = f(z)\ \forall z \in D$.*

Teorema 3.14 (Teorema de Cauchy-Gourssat) *Sea $\gamma : [a,b] \to C$, una curva cerrada regular y sea $f : D \subset C \to C$ una función compleja de variable compleja. Si $f(z) \in \mathcal{H}\left(\gamma^* U \overset{\circ}{\gamma}\right)$ entonces*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

El resultado del teorema anterior se puede generalizar a conjuntos simplemente conexos de la siguiente forma

Teorema 3.15 *Sea $f : D \subset C \to C$ con D un dominio símplemente conexo, si $f \in \mathcal{H}(D)$ entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

para cualquier curva cerrada regular $\gamma : [a, b] \to C$ de forma que $\gamma^* \subseteq D$.

Teorema 3.16 Teorema de Cauchy-Gourssat *para múltiplemente conexos.Sea γ una curva cerrada simple, diferenciable a trozos y sean γ_j con $j = 1, \ldots, m$, m curvas cerradas simples y diferenciables a trozos interiores a la curva γ, tales que las regiones interiores a γ_j no tengan puntos en común. Sea R la región cerrada consistente en los puntos del interior y sobre γ excepto los puntos interiores a las γ_j para $j = 1, \ldots, m$ entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz$$

suponiendo todas las curvas con la misma orientación.

Representación gráfica de la situación

Corolario 3.17 ***(Principio de deformación de caminos):*** *Si γ_1 y γ_2 son dos curvas cerradas simples con la misma orientación tal que $\gamma_2^* \subseteq \gamma_1^*$. Si $f(z)$ es una función analítica en γ_1^* y $\overset{\circ}{\gamma}_1$, entonces*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

Ejemplo 3.19 *Calcula la siguiente integral*

$$\int_{R} \frac{dz}{z^2 (z + 9)}$$

3.4. Fórmula integral de Cauchy

Teorema 3.18 *Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, curva cerrada simple, derivable a trozos, con orientación positiva y regular y sea $f(z) \in \mathcal{H}\left(\overset{\circ}{\gamma} \cup \gamma^*\right)$ con $z_0 \in \overset{\circ}{\gamma}$, entonces para $n \in \mathbb{N}$ se cumple*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

ses decir, el valor de $f(z)$ en $\overset{\circ}{\gamma}$ sólo depende de los valores de f en la frontera.

Podemos obtener algunas integrales a lo largo de contornos cerrados simples, mediante la aplicación de esta fórmula. Por ejemplo, si queremos calcular la siguiente integral

$$\int_\gamma \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz$$

siendo

$$\gamma(t) = 2e^{it} \; t \in [0, 2\pi]$$

entonces la función

$$f(z) = \frac{z}{9-z^2}$$

tiene como singularidades a 3 y -3, que están fuera de la curva, luego $f(z)$ es analítica sobre la curva y en el interior de γ, además como $-i \in \overset{\circ}{\gamma}$, tendremos que:

$$\int_\gamma \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz = \int_\gamma \frac{\frac{z}{(9-z^2)}}{(z+i)}dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z+i)}dz$$

luego por la fórmula integral de Cauchy el valor de esta integral es

$$2\pi i f(-i) = \frac{\pi}{5}$$

Si $f(z)$ es analítica sobre γ, curva cerrada simple, derivable a trozos, con orientación positiva y en su interior, si $z_0 \in \overset{\circ}{\gamma}$ es un punto de su interior, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

es decir, el valor de $f(z)$ en $\overset{\circ}{\gamma}$ sólo depende de los valores de f en la frontera.

Teorema 3.19 *Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, curva cerrada simple, derivable a trozos, con orientación positiva y regular y sea $f(z) \in \mathcal{H}\left(\overset{\circ}{\gamma} \cup \gamma^*\right)$ con $z_0 \in \overset{\circ}{\gamma}$, entonces para $n \in \mathbb{N}$ se cumple*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz,$$

siendo $f^{(n)}(z_0)$ la derivada n–ésima de la función $f(z)$ en el punto z_0, es decir

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{d^n f}{dz^n}(z_0).$$

3.4.1. El teorema de los residuos. Aplicaciones.

Mediante el teorema Cauchy-Gourssat es posible calcular integrales a lo largo de curvas cerradas, pero sólo en el caso de que estas sean funciones analíticas de la forma

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^n},$$

y bajo ciertas condiciones. El siguiente resultado es más general y permite calcular integrales de tipos más generales.

Definición 3.18 *Sea* $f(z) \in \mathcal{H}(B^*(z_0, \delta))$ *con* z_0 *una singularidad aislada de* $f(z)$. *Se llama residuo de* $f(z)$ *en* z_0 *a*

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$$

siendo γ cualquier curva cerrada, simple, regular con orientación positiva tal que $\gamma^* \subset B^*(z_0, r)$.

Proposición 3.20 *Si* z_0 *es una singularidad evitable de* $f(z) \Rightarrow \operatorname{Res}(f(z), z_0) = 0$.

El resultado se obtiene utilizamos el teorema de Cauchy-Gourssat, puesto que al ser evitable, la función es holomorfa en todos los puntos de la curva y de su interior.

Proposición 3.21 *Si* z_0 *es un polo simple de* $f(z) \Rightarrow \operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.

Proposición 3.22 *Si* $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ *siendo* $p(z)$ *y* $q(z)$ *dos funciones analíticas en* $z_0 \in \mathbb{C}$, *y con* $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ *y* $q'(z_0) \neq 0$ *(es un cero simple de* $q(z)$*)*$\Rightarrow$

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Proposición 3.23 *Si* $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ *siendo* $p(z)$ *y* $q(z)$ *dos funciones analíticas en* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Si* z_0 *es un cero de orden* k *de* $f(z)$ *y un cero de orden* $k+1$ *de* $q(z)$, *entonces* z_0 *es un polo simple de* $f(z)$ *y*

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = (k+1) \frac{p^{(k)}(z_0)}{q^{(k+1)}(z_0)}$$

Ejemplo 3.20 *Calcula el residuo de la función*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

en cada una de sus singularidades.

Solución: Como la función $f(z)$ es una función racional, sus singularidades se encuentran en los ceros del denominador:

$$z^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow z = \pm i,$$

Hay dos singularidades

$$\begin{aligned} z_1 &= i, \\ z_2 &= -i. \end{aligned}$$

en este caso

$$\begin{aligned} p(z) &= 1, \\ q(z) &= z^2+1, \\ q'(z) &= 2z \end{aligned}$$

y se cumplen en cada punto las condiciones de la proposición

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), i) &= \frac{p(i)}{q'(i)} = \frac{1}{2i}, \\ \operatorname{Res}(f(z), -i) &= \frac{p(i)}{q'(i)} = -\frac{1}{2i}. \end{aligned}$$

Proposición 3.24 *Si* $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)}$ *siendo* $\phi(z)$ *analítica en* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y con* $\phi(z_0) \neq 0 \Rightarrow$

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \phi(z_0)$$

Demostración: Puesto que

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\phi(z)}{(z-z_0)} = \lim_{z\to z_0}\phi(z) = \phi(z_0).$$

Proposición 3.25 *Si* $f(z)$ *tiene un polo de orden* m *en* $z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right)$$

Proposición 3.26 *Si* $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$ *siendo* $\phi(z)$ *analítica en* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y con* $\phi(z_0) \neq 0 \Rightarrow$

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{\phi^{m-1}(z_0)}{(m-1)!}$$

Demostración: Puesto que

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-}$$

Ejemplo 3.21 *Calcula el residuo de las siguientes funciones en sus correspondientes singularidades:*

$$\begin{aligned} a)\ f(z) &= \frac{z^3+2z}{(z-i)^3} \\ b)\ g(z) &= \frac{\operatorname{senh}(z)}{z^4} \\ c)\ h(z) &= \frac{1}{z(e^z-1)} \end{aligned}$$

Proposición 3.27 *Recordemos que el punto del infinito, ∞, puede ser una singularidad aislada, en ese caso también puede calcularse su residuo:*

$$\operatorname{Res}\left(f\left(z\right),\infty\right)=-\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)$$

Definición 3.19 *Una función es* meromorfa *si y sólo si solo tiene singularidades aisladas de tipo polo.*

Teorema 3.28 (Teorema de los residuos) *Sea $D\subseteq\mathbb{C}$, con $D\neq\emptyset$, un dominio simplemente conexo. Sean $z_1,\ldots,z_n\in A$, con $z_i\neq z_j$ con $i\neq j$ y sea $f\left(z\right)$ una función compleja de variable compleja con $f\left(z\right)\in\mathcal{H}\left(D-\{z_1,\ldots,z_n\}\right)$ y siendo $\{z_1,\ldots,z_n\}$ singularidades aisladas. Si γ es una curva cerrada, simple, diferenciable a trozos y orientada en sentido positivo de forma que $\gamma^*\subseteq D-\{z_1,\ldots,z_n\}$, entonces*

$$\int_\gamma f\left(z\right)dz=2\pi i\sum_{z_k\in\overset{\circ}{\gamma}}\operatorname{Res}\left(f\left(z\right),z_k\right)$$

Proposición 3.29 *Sea $f\left(z\right)\in\mathcal{H}\left(A-\{z_1,\ldots,z_n\}\right)$ y siendo $\{z_1,\ldots,z_n\}$ singularidades aisladas de $f\left(z\right)$. Si γ es una curva cerrada, simple, diferenciable a trozos y orientada en sentido positivo de forma que $z_k\in\overset{\circ}{\gamma}$ $\forall k=1,\ldots,n\Rightarrow$*

$$\int_\gamma f\left(z\right)dz=-2\pi i\operatorname{Res}\left(f\left(z\right),\infty\right)=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)$$

Ejemplo 3.22 *Calcula las siguientes integrales a lo largo de las curvas indicadas utilizando de forma apropiada el teorema de los residuos.*

$$\int_\gamma\frac{1}{z\left(z^2+9\right)}dz\qquad\gamma\left(t\right)=\beta e^{it}\qquad t\in\left[0,2\pi\right]\qquad\beta>1$$

Ejemplo 3.23 *Calcula las siguientes integrales a lo largo de las curvas indicadas utilizando de forma apropiada el teorema de los residuos.*

a) $$\int_\gamma\frac{e^z}{z\left(1-z\right)^3}dz\qquad\gamma\left(t\right)=\beta e^{it}\qquad t\in\left[0,2\pi\right]\qquad\beta>1$$

b) $$\int_\gamma\tan\left(z\right)dz\qquad\gamma\left(t\right)=2e^{it}\qquad t\in\left[0,2\pi\right]$$

c) $$\int_\gamma\frac{dz}{\left(z^2-1\right)^2+3}$$ $\gamma\left(t\right)$ *es el rectángulo de vértices* $z_1=-2,z_2=2,z_3=2+i,z_4=-2+i$

Solución: a) La función tiene dos singularidades de tipo polo $z_0=0$, y $z_1=1$, evaluamos el residuo de la función en dichas singularidades. Para $z_0=0$, que es un polo simple,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z\left(1-z\right)^3},0\right)=\operatorname{Res}\left(\frac{\phi_0\left(z\right)}{z},0\right)=\phi_0\left(0\right)$$

donde

$$\phi_{\prime}(z)=\frac{e^{z}}{(1-z)^{3}}$$

por tanto

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{z}}{z(1-z)^{3}},0\right)=\frac{e^{0}}{(1-0)^{3}}=\frac{1}{1}=1$$

Para $z_1=1$, que es un polo de orden 3

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{z}}{z(1-z)^{3}},1\right)=\operatorname{Res}\left(\frac{\phi_1(z)}{(z-1)^{3}},1\right)=\frac{\phi_1''(1)}{2!}$$

donde

$$\phi_1(z)=-\frac{e^{z}}{z}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\phi_1'(z)&=-\frac{ze^{z}-e^{z}}{z^{2}}=\frac{e^{z}(1-z)}{z^{2}}\\ \phi_1''(z)&=\frac{(e^{z}(1-z)-e^{z})z^{2}-2ze^{z}(1-z)}{z^{4}}\end{aligned}$$

y evaluando en $z_1=1$

$$\phi_1''(1)=-e$$

por tanto

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{z}}{z(1-z)^{3}},0\right)=-\frac{e}{2}$$

La curva es una circunferencia con radio β, como este radio es mayor que 1, entonces ambas singularidades están dentro de la curva y el valor de la integral mediante el teorema de los residuos es

$$\int_{\gamma}\frac{e^{z}}{z(1-z)^{3}}dz=2\pi i\left(\operatorname{Res}(f(z),0)+\operatorname{Res}(f(z),1)\right)=2\pi i\left(1-\frac{e}{2}\right)$$

b) La integral puede expresarse como

$$\int_{\gamma}\tan(z)\,dz=\int_{\gamma}\frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}dz$$

de esta forma es fácil encontrar las singularidades de la función, ya que estass serán las que anulen el denominador

$$\cos(z)=0\Leftrightarrow z=\frac{\pi}{2}+k\pi\qquad k\in\mathbb{Z}$$

Todas ellas son singularidades tipo polo y los residuos de $f(z)$ serán, puesto que $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ con $p\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^k$, con $q\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = 0$ y $q'\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^{k+1}$, por tanto

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \frac{p\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{q'\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)} = -1$$

Para calcular la integral hay que considerar sólo las singularidades que estén dentro de la curva, como es una circunferencia la distancia al centro debe ser menor que el radio

$$d\left(0, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) < 2 \Rightarrow \left|0 - \frac{\pi}{2}+k\pi\right| = \left|\frac{\pi}{2}+k\pi\right| < 2 \Leftrightarrow -2 < \frac{\pi}{2}+k\pi < 2$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} k &= -2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} - 2\pi < -2 \\ k &= -1 \Rightarrow -2 < \frac{\pi}{2} - \pi < 2 \\ k &= 0 \Rightarrow -2 < \frac{\pi}{2} < 2 \\ k &= 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi > 2 \end{aligned}$$

por tanto los únicos valores de k que producen una singularidad dentro de la curva del enunciado son $k = 0$ y $k = -1$, y la integral de $f(z)$ a lo largo de γ viene dada por

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(f(z), -\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(f(z), \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi i(-1-1) = -4\pi i$$

c) Buscamos como en los casos anteriores las singularidades de la función del integrando, la cual al tratarse de una función racional sólo tendrá problemas en los complejos que anulan el denominador

$$\left(z^2-1\right)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(z^2-1\right)^2 = -3 \Leftrightarrow \left(z^2-1\right) = \sqrt{-3} \Leftrightarrow z^2 - 1 = \pm\sqrt{3}i \Leftrightarrow z^2 = 1 \pm \sqrt{3}i$$

por tanto

$$z = \sqrt{1 \pm \sqrt{3}i}$$

Si ponemos los complejos en forma exponencial

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3} \\ z_2 &= 1 - \sqrt{3}i = 2e^{-i\pi/3} \end{aligned}$$

y tomamos la raíz cuadrada de cada uno de ellos

$$\begin{aligned}
w_{1,1} &= \sqrt{z_1} = \sqrt{2}e^{i\pi/6} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \\
w_{1,2} &= -\sqrt{z_1} = \sqrt{2}e^{i7\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \\
w_{2,1} &= \sqrt{z_2} = \sqrt{2}e^{-i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \\
w_{2,2} &= -\sqrt{z_2} = \sqrt{2}e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i
\end{aligned}$$

Para el cálculo de la integral debemos considerar los residuos de aquella o aquellas sigularidades que están en el interior de la curva y en este caso, teniendo en cuenta de que se trata de un rectángulo y haciendo las consideraciones oportunas obtenemos

$$\begin{aligned}
w_{1,1}, w_{2,2} &\in \overset{\circ}{\gamma} \\
w_{1,2}, w_{2,1} &\notin \overset{\circ}{\gamma}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\int_\gamma \frac{dz}{\left(z^2-1\right)^2+3}dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(f\left(z\right), w_{1,1}\right) + \operatorname{Res}\left(f\left(z\right), w_{2,2}\right)\right)$$

Calculamos ahora dichos residuos

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\left(z-w_{1,1}\right)\left(z-w_{1,2}\right)\left(z-w_{2,1}\right)\left(z-w_{2,2}\right)}, w_{11}\right) = \frac{1}{\left(w_{1,1}-w_{1,2}\right)\left(w_{1,1}-w_{2,1}\right)\left(w_{11}-w_{2,2}\right)}$$

Cálculo de integrales reales mediante residuos

Integrales del tipo $\int_0^{2\pi} H\left(\operatorname{sen} t, \cos t\right) dt$ con $H\left(x,y\right)$ una función racional $P\left(x,y\right)/Q\left(x,y\right)$
Como

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} t &= \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\
\cos t &= \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}
\end{aligned}$$

Haciendo $\gamma\left(t\right) = e^{it}$, tendremos

$$\gamma'\left(t\right) = ie^{it}dt \Rightarrow \gamma'\left(t\right) = i\gamma\left(t\right)dt \Rightarrow \frac{\gamma'\left(t\right)}{i\gamma\left(t\right)} = dt$$

y por tanto

$$\int_0^{2\pi} H(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt = \int_0^{2\pi} H\left(\frac{\gamma(t) - \frac{1}{\gamma(t)}}{2i}, \frac{\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)}}{2}\right)\frac{1}{i\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt$$

Usando ahora la definición de integral a lo largo de una curva

$$\int_0^{2\pi} H(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz$$

siendo

$$f(z) = H\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)\frac{1}{iz} = H\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right)\frac{1}{iz}$$

que es racional.

Si f es holomorfa en $A \subseteq \mathbb{C}$, abierto con $\gamma^* \subseteq A$, excepto en los polos de H, entonces

$$\int_0^{2\pi} H(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt = 2\pi i \sum_{|z_j|<1} \operatorname{Res}(f, z_j)$$

Ejemplo 3.24 *Calcula*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2}$$

Haciendo el cambio obtenemos

$$f(z) = \frac{-4iz}{(z^2 + 4z + 1)^2}$$

Solución: $\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi$

Ejemplo 3.25 *Calcula*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + \alpha \cos t)} \qquad -1 < \alpha < 1$$

Haciendo el cambio obtenemos

$$f(z) = \frac{2}{i(\alpha z^2 + 2z + a)}$$

Solución: Las singularidades son

$$-1 - \sqrt{1 - \alpha^2} \quad \notin \quad \mathring{\gamma}$$

$$-1 + \sqrt{1 - \alpha^2} \quad \in \quad \mathring{\gamma}$$

Solución: $\frac{2\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$

Integrales impropias sobre intervalos no acotados El teorema de los Residuos permite, mediante una serei de manipulaciones, obtener procedimientos para calcular integrales en el sentido Riemann impropio de diversas clases de funciones reales. El objetivo de esta sección es presentar un resumen de los principales resultados de este tipo.

A partir de ahora $H(x)$ será una función racional, es decir, de la forma

$$H(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

con p y q dos polinomios con coeficientes reales. Por $\deg p(x)$ y $\deg q(x)$ denotaremos, respectivamente, los grados de los polinomios p y q. Al escribir $H(x)$ nos referimos a la función racional H definida sobre el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales. Esta función podemos evidentemente considerarla definida sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Para indicar que nos estamos refiriendo a la función H extendida a $\mathbb{C}$ escribiremos $H(z)$. La función $H(z)$ tendrá una cantidad finita de singularidades, y todas ellas serán polos; en realidad serán las raíces del polinomio del denominador. Si $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$ es el conjunto de los polos de $H(z)$, consideraremos el subconjunto de los polos con parte real positiva como

$$\mathcal{I}_+ = \{z_j : \operatorname{Im} z_j > 0\}$$

y el de los polos reales como

$$\mathcal{I} = \{z_j : \operatorname{Im} z_j = 0\}$$

que evidentemente son disjuntos.

Definición 3.20 *Sea $\dot{f} : [a, \infty[\to \mathbb{R}$, tal que $f(x)$ es integrable en $[a, x]$ $\forall x > a$, se dice que es integrable Riemann Impropia en $[a, \infty[\Leftrightarrow$*

$$\exists \operatorname{lím}_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

al valor de dicho límite se le llama integral de f en $[a, \infty[$

$$\int_a^\infty f(t)\, dt = \operatorname{lím}_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

Análogamente para intervalos de la forma $]-\infty, a]$

Definición 3.21 *Sea $\dot{f} : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, es integrabel en todo $\mathbb{R}$ en sentido impropio si lo es en $[0, \infty[$ y $]-\infty, 0]$ yentonces*

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\, dt = \int_{-\infty}^0 f(t)\, dt + \int_0^\infty f(t)\, dt$$

Análogamente para intervalos de la forma $]-\infty, a]$

Definición 3.22 *Si f es integrable Riemann en $[-x,x]$ $\forall x>0$ y existe el límite*

$$\text{lím}_{x\to\infty}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

se dice que existe el Valor principal de la integral y además

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \text{lím}_{x\to\infty}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

Proposición 3.30 *Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es integrable Riemann impropia entonces existe el Valor Principal.*

Proposición 3.31 *Consideremos una integral de la forma*

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,dx$$

y tal que se verifican las siguientes hipótesis:

1. *$H(x)$ no tiene polos reales, es decir, $q(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.*
2. $\deg p(x) > 1+\deg q(x)$

Se tiene entonces que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,dx = 2\pi i\sum_{z_j\in\mathcal{I}_+}\text{Res}\,(H(z),z_j) = -2\pi i\sum_{z_j\notin\mathcal{I}_+}\text{Res}\,(H(z),z_j)$$

Proposición 3.32 *Consideremos una integral de la forma*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}H(x)\,dx$$

y tal que se verifican las siguientes hipótesis:

1. $a>0$
2. *$H(x)$ no tiene polos reales, es decir, $q(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.*
3. $\deg p(x) > \deg q(x)$

Se tiene entonces que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}H(x)\,dx = 2\pi i\sum_{z_j\in\mathcal{I}_+}\text{Res}\left(e^{iaz}H(z),z_j\right) = -2\pi i\sum_{z_j\notin\mathcal{I}_+}\text{Res}\left(e^{iaz}H(z),z_j\right)$$

Proposición 3.33 *Consideremos una integral de la forma*

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,dx$$

y tal que se verifican las siguientes hipótesis:

1. *Los polos reales de $H(x)$ son simples, es decir, si $z_j \in \mathcal{I}$, entonces $(z - z_j)\,H(z)$ es una función holomorfa en z_j.*
2. $\deg p(x) > 1 + \deg q(x)$

Se tiene entonces que

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z_j \in \mathcal{I}_+} \operatorname{Res}(H(z), z_j) + \pi i \sum_{z_j \notin \mathcal{I}} \operatorname{Res}(H(z), z_j)$$

Proposición 3.34 *Consideremos una integral de la forma*

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,dx$$

y tal que se verifican las siguientes hipótesis:

1. $a > 0$
2. *Los polos reales de $H(x)$ son simples, es decir, si $z_j \in \mathcal{I}$, entonces $(z - z_j)\,H(z)$ es una función holomorfa en z_j.*
3. $\deg p(x) \geq \deg q(x)$

Se tiene entonces que

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} H(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z_j \in \mathcal{I}_+} \operatorname{Res}\left(e^{iaz} H(z), z_j\right) + \pi i \sum_{z_j \notin \mathcal{I}} \operatorname{Res}\left(e^{iaz} H(z), z_j\right).$$