Capítulo 7

La transformada de Fourier

7.1. Definiciones

Definición 7.1 *Sea* $f : (-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$*; definimos la transformada de* Fourier *de* $f(t)$ *en* $\omega \in \mathbb{R}$*, a*

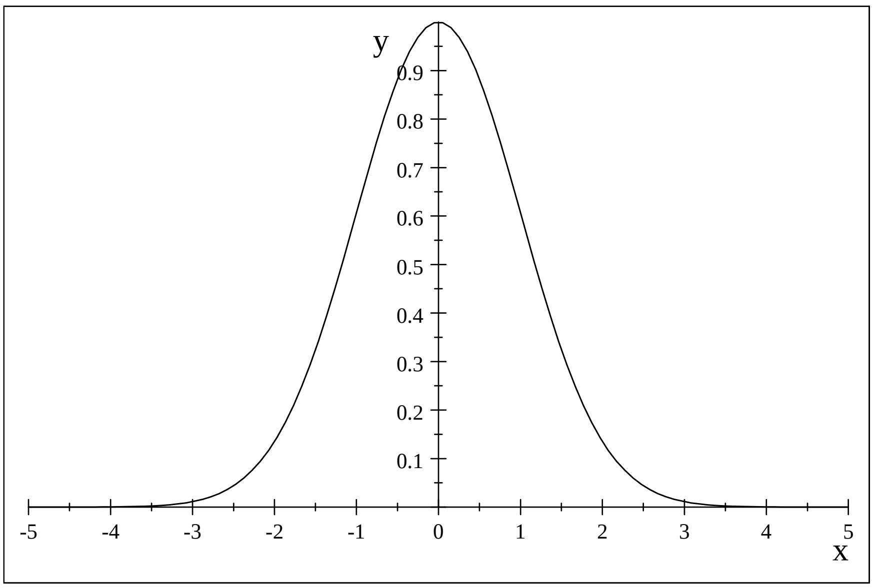
$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

donde esa integral tenga sentido, es decir, exista y sea finita.

La convergencia de la integral implica que

$$\lim_{t \to \pm\infty} \left| f(t)\, e^{-i\omega t} \right| = \lim_{t \to \pm\infty} |f(t)| = 0$$

Por tanto las gráficas de $|f(t)|$ son de la forma



En general se deben cumplir las condiciones de Dirichlet que se indican en el siguiente teorema:

Teorema 7.1 (Condiciones de Dirichlet) *Si $f : (-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ es absolutamente convergente en $\mathbb{R}$, es decir, la integral*

$$\int_a^b |f(t)|\, dt$$

existe y es finita, y en cada subintervalo cerrado y acotado de la forma $[a, b]$ ocurre:

1. *$f(t)$ es continua en $[a, b]$ salvo una cantidad finita de discontinuidades y todas ellas de salto infinito.*

2. *$f(t)$ tienen en cada $[a, b]$ una cantidad finita de máximos y mínimos.*

entonces existe $\mathcal{F}[f(t)](\omega)$.

Ejemplo 7.1 *Las siguientes funciones incumplen alguna de las condiciones de Dirichlet para la existencia de transformada de Fourier.*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{t-k} \quad k < t \leq k+1 \\ x(t) &= \operatorname{sen} \frac{1}{x} \\ x(t) &= E[x] \quad \textit{(Función parte entera)} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.2 *Vamos a calcular mediante la definición la transformada de Fourier de las siguientes funciones:*

a) $f(t) = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$ *b)* $g(t) = h_0(t)\, e^{-at}; \qquad a > 0$

c) $h(t) = \begin{cases} A & \textit{si } |t| \leq T \\ 0 & \textit{si } |t| > T \end{cases} \qquad T > 0$ *d)* $k(t) = e^{-|t|}$

donde $h_0(t)$ es la función de Heaviside.
Solución: Utilizando la definición

a)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-i\omega t} dt = -\frac{\alpha e^{-i\omega t}}{i\omega}\bigg|_{t=-\infty}^{t=\infty} \\ &= \lim_{t\to\infty} -\frac{\alpha e^{-i\omega t}}{i\omega} - \lim_{t\to-\infty} -\frac{\alpha e^{-i\omega t}}{i\omega} = \frac{\alpha}{i\omega}\left(\lim_{t\to-\infty} e^{-i\omega t} - \lim_{t\to\infty} e^{-i\omega t}\right) \end{aligned}$$

y ninguno de los dos límites existe puesto que, por ejemplo, utilizando la definición de la exponencial compleja

$$\lim_{t\to\infty} e^{-i\omega t} = \lim_{t\to\infty} (\cos\omega t - i \operatorname{sen}\omega t) = \lim_{t\to\infty} \cos\omega t - i \lim_{t\to\infty} \operatorname{sen}\omega t$$

y ninguna de los dos límites, parte real o imaginaria, existen puesto que las funciones son periódicas. Por tanto, no existe en ningún punto la transformada de Fourier de una constante.

b)

$$\mathcal{F}\left[g\left(t\right)\right]\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}g\left(t\right)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}h_0\left(t\right)e^{-at}e^{-i\omega t}dt$$

Por la definición de $h_0\left(t\right)$, que es nula para valores de $t<0$, y vale 1 para el resto, la integral queda como

$$\mathcal{F}\left[g\left(t\right)\right]\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}h_0\left(t\right)e^{-t(a+i\omega)}dt=\int_{0}^{\infty}1\cdot e^{-t(a+i\omega)}dt=-\left.\frac{e^{-t(a+i\omega)}}{a+i\omega}\right|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{1}{a+i\omega}\left(1-\lim_{t\to\infty}e^{-t(a+i\omega)}\right)$$

Calculamos el valor del límite, utilizando para ello la definición de exponencial compleja

$$\lim_{t\to\infty}e^{-t(a+i\omega)}=\lim_{t\to\infty}e^{-at}\left(\cos\omega t-i\operatorname{sen}\omega t\right)$$

Como $a>0$ entonces

$$\lim_{t\to\infty}e^{-at}=0$$

y puesto que las funciones $\cos\omega t$ y $\operatorname{sen}\omega t$ están acotadas

$$\lim_{t\to\infty}e^{-at}\left(\cos\omega t-i\operatorname{sen}\omega t\right)=0$$

y la transformada de Fourier buscada es

$$\mathcal{F}\left[g\left(t\right)\right]\left(\omega\right)=\frac{1}{a+i\omega}\qquad a>0$$

c) Teniendo en cuenta que $h\left(t\right)$ es de soporte compacto, es decir, es nula fuera del intervalo $[-T,T]$, al utilizar la definición de Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\left[h\left(t\right)\right]\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}h\left(t\right)e^{-i\omega t}dt=\int_{-T}^{T}Ae^{-i\omega t}dt$$

Supongamos en primer lugar que $\omega\neq0$, entonces

$$\int_{-T}^{T}Ae^{-i\omega t}dt=-\left.\frac{A}{i\omega}e^{-i\omega t}\right|_{t=-T}^{t=T}=-\frac{A}{i\omega}\left(e^{-i\omega T}-e^{i\omega T}\right)=\frac{A}{\omega}\left(\frac{e^{i\omega T}-e^{-i\omega T}}{i}\right)=\frac{2A}{\omega}\operatorname{sen}\left(\omega T\right)$$

Si ahora $\omega=0$

$$\mathcal{F}\left[h\left(t\right)\right]\left(\omega\right)=\int_{-T}^{T}Ae^{-i\cdot0\cdot t}dt=\int_{-T}^{T}Adt=2AT$$

Por tanto

$$\mathcal{F}\left[h\left(t\right)\right]\left(\omega\right)=\begin{cases}2AT & \text{si } \omega=0\\ \frac{2A}{\omega}\operatorname{sen}\left(\omega T\right) & \text{si } \omega\neq0\end{cases}$$

Notar que la función es continua en $\omega = 0$, puesto que

$$\lim_{\omega\to 0} \mathcal{F}[h(t)](\omega) = \lim_{\omega\to 0} \frac{2A}{\omega} \operatorname{sen}(\omega T) = 2AT$$

donde para el cálculo del límite se ha utilizado la regla de L'Hôpital. En realidad la función anterior es la función *seno cardinal o* $\operatorname{senc}(\omega T)$ multiplicada por la constante $2AT$ con

$$\operatorname{senc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \\ \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

d)

$$\mathcal{F}[k(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt$$

Como

$$|t| = \begin{cases} t & \text{si } t > 0 \\ \\ -t & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

y por las propiedades aditivas de la integral

$$\mathcal{F}[k(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-i\omega)} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+i\omega)} dt$$

e integrando cada término

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[k(t)](\omega) &= \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-i\omega)} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+i\omega)} dt = \frac{1}{1-i\omega} e^{t(1-i\omega)} \Big|_{t=-\infty}^{t=0} + \frac{-1}{1+i\omega} e^{-t(1+i\omega)} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \\ &= \frac{1}{1-i\omega}\left(1 - \lim_{t\to -\infty} e^{t(1-i\omega)}\right) + \frac{1}{1+i\omega}\left(1 - \lim_{t\to\infty} e^{-t(1+i\omega)}\right) \end{aligned}$$

El cálculo de límites nos da, teniendo en cuenta que $\cos\omega t$ y $\operatorname{sen}\omega t$ están acotados

$$\begin{aligned} \lim_{t\to -\infty} e^{t(1-i\omega)} &= \lim_{t\to -\infty} e^{t} (\cos\omega t - i \operatorname{sen}\omega t) = 0 \\ \lim_{t\to \infty} e^{-t(1+i\omega)} &= \lim_{t\to -\infty} e^{-t} (\cos\omega t - i \operatorname{sen}\omega t) = 0 \end{aligned}$$

y

$$\mathcal{F}[k(t)](\omega) = \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Como $\mathcal{F}[f(t)](\omega) \in \mathbb{C}$, no es posible realizar su representación gráfica, sin embargo, como entonces tendrá un módulo y un argumento principal podemos realizar dichas representaciones que toman nombres particulares

$$\text{Espectro de amplitud} : \quad |\mathcal{F}[k(t)](\omega)|$$

$$\text{Espectro de fase} : \quad \operatorname{Arg}(\mathcal{F}[k(t)](\omega))$$

Si para cada $\omega \in \mathbb{R}$, donde $\mathcal{F}[f(t)](\omega)$ está definida se cumple que $\mathcal{F}[f(t)](\omega) \in \mathbb{R}$, entonces la representación gráfica de esta función es posible y se denomina *espectro de potencias.*

Obviamente $\mathcal{F}[f(t)](\omega)$ sólo estará definida si la integral impropia existe y es finita. Una condición de existencia viene dada por la llamada condición de Dirichlet.

7.2. Propiedades de la tranformada de Fourier

- **Linealidad:**

  Dadas dos funciones
  $$f, g : (-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$
  y sean $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Supongamos que
  $$\left.\begin{array}{l} \exists \mathcal{F}[f](\omega) \;\text{ para } \omega \in D_1 \subseteq \mathbb{R} \\ \\ \exists \mathcal{F}[g](\omega) \;\text{ para } \omega \in \; D_2 \subseteq \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\omega) = \alpha \mathcal{F}[f](z) + \beta \mathcal{F}[g](\omega) \;\text{ para } \omega \in \; D_1 \cap D_2$$

- **Simetría:**

  Si $f(t) \in \mathbb{R}\ \forall t \Rightarrow \mathcal{F}[f](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f](-\omega)} \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$

  Demostración:
  $$\overline{\mathcal{F}[f](-\omega)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i(-\omega)t} dt} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t) e^{i\omega t}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{-i\omega t} dt$$
  Como $f(t)$ es real
  $$\overline{f(t)} = f(t)$$
  por tanto
  $$\overline{\mathcal{F}[f](-\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}[f](\omega)$$
  En particular
  $$|\mathcal{F}[f](\omega)| = |\mathcal{F}[f](-\omega)|$$
  es decir, el espectro de amplitud es par (simétrica respecto al eje OY).

- **Paridad:**

  Si $f(t)$ es par $\Rightarrow$
  $$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$
  hacemos cambio $t = -s$ en la primera integral y como $f(-s) = f(s)$ por ser par, tendremos:
  $$\int_{\infty}^{0} f(-s)\, e^{-i\omega(-s)} (-ds) + \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{\infty}^{0} f(s)\, e^{i\omega s} (-ds) + \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

Cambiando los extremos de integración

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_0^{\infty} f(s)\, e^{i\omega s} ds + \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t)\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) dt = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt$$

siendo esta integral la llamada *integral coseno de Fourier* de la función $f(t)$.

- Si $f(t)$ es impar $\Rightarrow$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

hacemos cambio $t = -s$ en la primera integral y como $f(-s) = -f(s)$ por ser par, tendremos:

$$\int_{\infty}^{0} -f(s)\, e^{-i\omega(-s)}(-ds) + \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = -\int_{\infty}^{0} f(s)\, e^{i\omega s}(-ds) + \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

Cambiando los extremos de integración

$$\mathcal{F}[f](\omega) = -\int_0^{\infty} f(s)\, e^{i\omega s} ds + \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t)\left(-e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) dt = -2i\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\, dt$$

siendo la integral la llamada *integral seno de Fourier* de la función $f(t)$.

- **Traslación en el espacio temporal:**

Dada

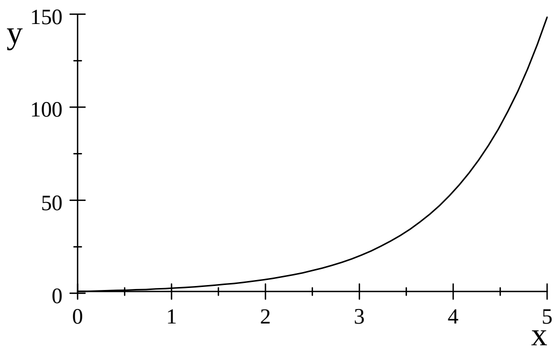
$$f : (-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$

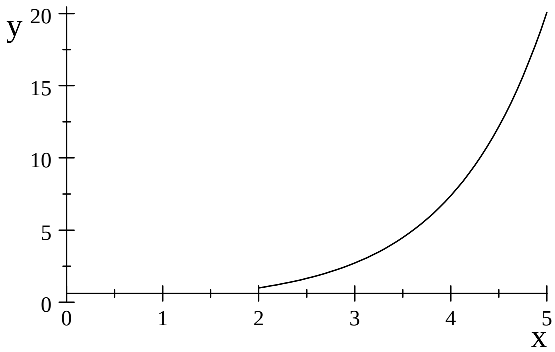
y supongamos que

$$\exists \mathcal{F}[f](\omega) \text{ y está definida sobre } D \subseteq \mathbb{C}$$

entonces si $t_0 \in \mathbb{R}$ y definimos la función $f_0(t)$ como

$$f_0(t) = f(t - t_0)$$





entonces

$$\exists\mathcal{F}\left[f_0\right](\omega) = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}\left[f\right](z) \text{ y está definida sobre } D$$

Demostración:

$$\mathcal{F}\left[f_0\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\, e^{-i\omega t} dt$$

Hacemos el cambio $t - t_0 = s \Rightarrow dt = ds$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-i\omega(s+t_0)} ds = e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-i\omega s} ds$$

es decir

$$\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right](\omega) = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega) \;\; \forall\omega\in D$$

- **Traslación en el espacio de frecuencias:**

  Dada

  $$f : (-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$

  y supongamos que

  $$\exists\mathcal{F}\left[f\right](\omega) \text{ y está definida sobre } D \subseteq \mathbb{C}$$

  entonces si $a \in \mathbb{R}$ y definimos la función $f_a(t)$ como

  $$f_a(t) = e^{iat} f(t)$$

  entonces

  $$\exists\mathcal{F}\left[f_a\right](\omega) = \mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega - a) \text{ y está definida sobre } D$$

  Demostración:

  $$\mathcal{F}\left[f_a\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

  $$\mathcal{F}\left[f_a\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(\omega-a)} f(t)\, dt = \mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$$

- **Cambio de escala:** Dada
$$f:(-\infty,\infty)\longrightarrow\mathbb{C}$$
y supongamos que
$$\exists\mathcal{F}\left[f\right](\omega)\ \text{ y está definida sobre } D\subseteq\mathbb{C}$$
entonces si $a\in\mathbb{R}$ y definimos la función $f_a(t)$ como
$$f_a(t)=f(at)$$
entonces
$$\exists\mathcal{F}\left[f(at)\right](\omega)=\frac{1}{|a|}\mathcal{F}\left[f\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)\ \text{ y está definida sobre } aD$$
Demostración
$$\mathcal{F}\left[f(at)\right](\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(at)\,e^{-i\omega t}dt$$
Hacemos el cambio $at=s\Rightarrow dt=\frac{1}{a}ds$ y distinguimos dos casos: $a>0$ y $a<0$
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(at)\,e^{-i\omega t}dt &= \begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,e^{-i\omega s/a}\dfrac{ds}{a}=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,e^{-i\frac{\omega}{a}s}ds & a>0\\[2ex] \int_{\infty}^{-\infty}f(s)\,e^{-i\omega s/a}\dfrac{ds}{a}=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,e^{-i\frac{\omega}{a}s}ds & a<0\end{cases}\\ &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,e^{-i\frac{\omega}{a}s}ds=\frac{1}{|a|}\mathcal{F}\left[f\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

Observación 7.1 *Notar que la dilatación temporal implica una contracción en el espacio de frecuencias ω y viceversa.*

- **Derivación en el dominio temporal:**
Dada
$$f:(-\infty,\infty)\longrightarrow\mathbb{C}$$
y supongamos que f es derivable y que
$$\exists\mathcal{F}\left[f\right](\omega)\ \text{ y está definida sobre } D\subseteq\mathbb{C}$$
entonces
$$\exists\mathcal{F}\left[f'(t)\right](\omega)=(i\omega)\,\mathcal{F}\left[f\right](\omega)\ \text{ y está definida sobre } D$$
y en general si $f(t)$ es n veces derivable, entonces
$$\exists\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right](\omega)=(i\omega)^n\,\mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega)\ \text{ y está definida sobre } D$$

Demostración:
$$\mathcal{F}\left[f'(t)\right](\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)\,e^{-i\omega t}dt$$

integramos por partes $dv = f'(t)\,dt$ y $u = e^{-i\omega t}$, y por tanto $v = f(t)$ y $dt = (-i\omega)\,e^{-i\omega t}dt$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,e^{-i\omega t}dt = f(t)\,e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(i\omega)\,e^{-i\omega t}dt = (i\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt = (i\omega)\,\mathcal{F}[f](\omega)$$

si $f(t)$ es n veces derivable, entonces se aplica el procedimiento por induccion en n.

- **Derivación en el dominio de la frecuencia:**

  $\mathcal{F}[f](\omega)$ es derivable y

$$\frac{d^n}{d\omega^n}\left[\mathcal{F}[f(t)](\omega)\right] = (-1)^n\, i^n \mathcal{F}[t^n f(t)](\omega)$$

  Demostración:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\left[\mathcal{F}[f(t)](\omega)\right] &= \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} f(t)\,e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-it)\,f(t)\,e^{-i\omega t}dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,e^{-i\omega t}dt = -i\mathcal{F}[tf(t)](\omega)\end{aligned}$$

  Si se deriva n veces obtendremos por inducción en n la propiedad indicada.

7.2.1. Integración

Para una señal $x(t)$ en tiempo continuo que sea integrable se puede establecer la siguiente propiedad respecto a la transformada de Fourier de su función integral:

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) \iff \int_{-\infty}^{t} x(s)\,ds \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{i\omega}X(\omega) + \pi X(0)\,\delta(\omega)$$

7.2.2. Convolución

Una de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier es su efecto sobre la operación de convolución. Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}$, definimos su producto de convolución como la función definida por:

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)\,ds$$

Si existe la transformada de Fourier $F(\omega)$ y $G(\omega)$ de $f(t)$ y $g(t)$, respectivamente, entonces es posible calcular la transformada de Fourier de $h(t)$ como

$$H(\omega) = F(\omega)\,G(\omega)$$

También se cumple

$$\mathcal{F}[f(t)\cdot g(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}[f(t)](\omega) * \mathcal{F}[g(t)](\omega)\right)$$

La demostración se realiza actuando sobre la propia definición del producto de convolución.

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\, g(s)\, ds \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\, g(s)\, e^{-i\omega t} ds dt \end{aligned}$$

intercambiando el orden de integración y teniendo en cuenta que $g(s)$ no depende de t

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\, e^{-i\omega t} dt \right) ds$$

realizamos el cambio de variable $t - s = r$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\, e^{-i\omega t} dt \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\, e^{-i\omega s} e^{-i\omega r} dr \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, e^{-i\omega s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\, e^{-i\omega r} dr \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, e^{-i\omega s} F(\omega)\, ds \\ &= F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, e^{-i\omega s} ds \\ &= F(\omega)\, G(\omega) \end{aligned}$$

7.2.3. Relaciones de Parseval

Definición 7.2 *La energía total de la función* $f : \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}$ *se define como*

$$\varepsilon(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt$$

Teorema 7.2 *(Identidad de Parseval) Sea* $f : \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}$ *y supongamos que* $\varepsilon(f) < \infty$ *y que existe* $\mathcal{F}[f(t)](\omega)$*, entonces*

$$\varepsilon(f) = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(\mathcal{F}[f](\omega))$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega \tag{7.1}$$

Llamamos espectro de energía a la representación gráfica de la función $|\mathcal{F}[f](\omega)|^2$

Demostración: La demostración de 7.1 se realiza directamente utilizando la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{f(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \right)} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega) e^{i\omega t}} d\omega \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \right) dt
\end{aligned}$$

intercambiando el orden de integración (Teorema de Fubini)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)} F(\omega)\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega
\end{aligned}$$

7.2.4. Transformada inversa de Fourier

Definición 7.3 *Como en el caso de la transformada de Laplace, dada la función* $F(\omega)$ *nos preguntamos si existe una función* $f(t)$ *de forma que se cumpla*

$$\mathcal{F}[f](\omega) = F(\omega)$$

diremos entonces que $f(t)$ *es la transformada inversa de* $F(\omega)$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)](t) = f(t)$$

Esta inversa se puede calcular también de forma directa a través de una integral

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$$

Proposición 7.3 *La transformada inversa de Fourier tiene las siguientes propiedades:*

1. ***Linealidad:***

$$\mathcal{F}^{-1}[\alpha F(\omega) + \beta G(\omega)](t) = \alpha \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)](t) + \beta \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)](t)$$

2. ***Dualidad*** *Debido a la simetría de las expresiones del par de transformadas de Fourier, tendremos la siguiente propiedad de dualidad, que nos facilita el cálculo de algunas transformadas*
$$g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} f(\omega) \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi g(-\omega)$$
Por ejemplo dada la señal en tiempo continuo
$$x(t) = \frac{2}{1+t^2}$$
si tenemos en cuenta que la transformada de Fourier de
$$g(t) = e^{-|t|}$$
es
$$f(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$
es decir
$$x(t) = f(t)$$
entonces
$$X(\omega) = 2\pi g(-\omega) = 2\pi e^{-|\omega|}$$

3. ***Traslación***
$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega - a)](t) = e^{at}\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)](t)$$

4. ***Convolución***
$$\mathcal{F}^{-1}[(F \cdot G)(\omega)](t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega) \cdot G(\omega)](t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)](t) * \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)](t)$$

Ejemplo 7.3 *Sabiendo que la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$ es $F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, calcula la transformada de Fourier de $g(t) = \frac{2}{1+t^2}$*

Solución: *Teniendo en cuenta la propiedad de dualidad, vemos que $g(t) = F(t)$, es decir la función $g(t)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$ pero considerándola como una función del tiempo. Por tanto*
$$G(\omega) = 2\pi f(-\omega) = 2\pi e^{-|-\omega|} = 2\pi e^{-|\omega|} \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 7.4 *Comprueba que la transformada de Fourier de*
$$f(t) = \begin{cases} 1 & -a < t < a \\ 0 & \textit{resto} \end{cases}$$
es
$$F(\omega) = \frac{2 \operatorname{sen} a\omega}{\omega}$$

Ejemplo 7.5 *Comprueba que la transformada de Fourier de $g(t) = \frac{\operatorname{sen} at}{t}$ es*
$$F(\omega) = \begin{cases} \pi & -a < \omega < a \\ 0 & \textit{resto} \end{cases}$$