Capítulo 6

La transformada de Laplace

6.1. Funciones continuas a trozos. Función de Heaviside

Definición 6.1 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Diremos que $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una función continua a trozos $\Leftrightarrow$ Existe una partición del intervalo $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$, de forma que:*

1. *f es continua en cada subintervalo abierto de la partición:*

$$f \in \mathcal{C}\left(]t_k, t_{k+1}[\right); \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

2. *Existen los límites laterales de f en los extremos de cada subintervalo y son finitos*

$$\lim_{t \to t_{k^+}} f(t), \lim_{t \to t_{k^-}} f(t) \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 6.1 *Como ejemplo de función continua a trozos definida sobre un intervalo cerrado y acotado tenemos a la* función de Haar *(figura 6.1) definida de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ como:*

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}.$$

Definición 6.2 *Diremos que $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ es una función continua a trozos $\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}$, con $0 \leq a < b$, se verifica que $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es continua a trozos.*

Ejemplo 6.2 *Un ejemplo de función continua a trozos en un intervalo no acotado es la función $f(t)$ definida de $[0, \infty[$ en $\mathbb{R}$ como*

$$f(t) = k; \qquad \forall t \in [k, k+1[,$$

cuya representación gráfica viene dada por la figura 6.2.

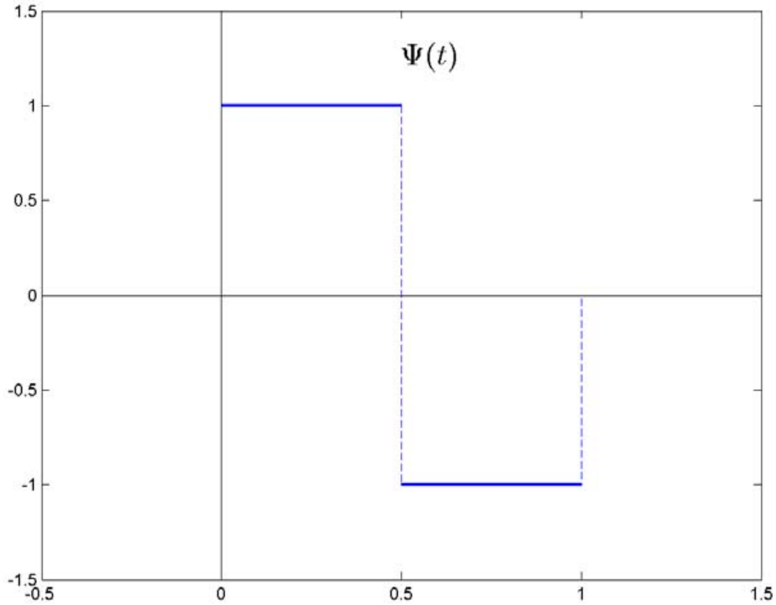


Figura 6.1: Función de Haar.

Definición 6.3 *Una de las funciones continuas trozos más conocidas y usadas en la teoría de transformada de Laplace es la* función de Heaviside*, definida para $a > 0$ como*

$$h_a : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$$

$$h_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

y cuya representación está dada en la figura 6.3. Si $a = 0$

$$h_0(t) = u(t)$$

es la llamada función escalón unitario*.*

La función de Heaviside actúa como un interruptor, de forma que si $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ es una función cualquiera, $(h_a f)(t)$ es la función

$$(h_a f)(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \\ f(t) & t \geq a \end{cases}.$$

De esta forma h_a "enciende" a f en el instante $t = a$.

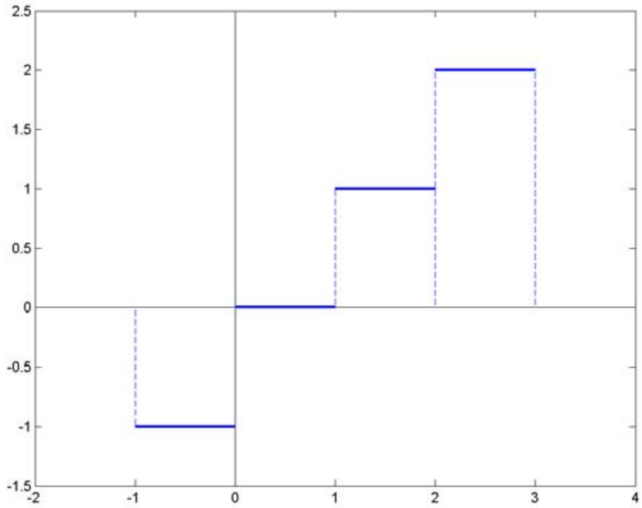


Figura 6.2: Función continua a trozos en intervalo no acotado.

Definición 6.4 *Si consideramos ahora $0 \leq a < b$, la función*

$$h_a - h_b : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$$

tiene la forma

$$(h_a - h_b) = \begin{cases} 0 & t \notin [a, b) \\ \\ 1 & t \in [a, b) \end{cases}$$

En este caso la función h_b tiene el efecto de "apagar" la señal o función sobre la que se aplique a partir del instante b

$$(h_a - h_b) f(t) = (h_a f)(t) - (h_b f)(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \\ f(t) & a \leq t < b \\ \\ 0 & t \geq b \end{cases}$$

La función $(h_a - h_b)(t)$ a veces se suele representar mediante la función característica de intervalo $\chi_I(t)$ definida para cualquier conjunto de números reales $I \subset \mathbb{R}$ como

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 0 & t \notin I \\ \\ 1 & t \in I \end{cases},$$

de este modo

$$(h_a - h_b)(t) = \chi_{[a,b[}(t).$$

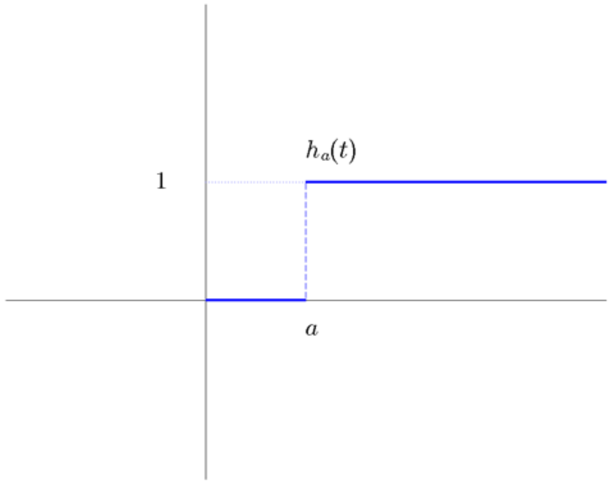


Figura 6.3: Función de Heaviside de parámetro $a > 0$.

Con esta interpretación física de ser un interruptor, la función de Heaviside es muy útil para describir funciones continuas a trozos que sean continuas a la derecha, por ejemplo la función

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ t-1 & 1 \le t < 3 \\ \operatorname{sen} t & t \ge 3 \end{cases},$$

puede escribirse en una sola línea como

$$f(t) = [h_0(t) - h_1(t)]\, t + [h_1(t) - h_3(t)]\,(t-1) + h_3(t) \operatorname{sen} t,$$

o también

$$f(t) = t \cdot h_0(t) - h_1(t) + [\operatorname{sen} t - (t-1)]\, h_3(t).$$

Observación 6.1 *Como la transformada de Laplace está definida mediante una integral, la condición de ser la función continua por la derecha (o por la izquierda) es irrelevante y podemos considerar a las funciones de esta forma.*

6.2. Definición de Transformada de Laplace

Definición 6.5 *Diremos que* $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *es una función* localmente integrable$\Longleftrightarrow$ *Existe la integral de Riemann en todo intervalo compacto* $[0, a] \subset [0, \infty[$.

Definición 6.6 *Sea $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ una función localmente integrable, se define la transformada de Laplace de $f(t)$ en $z \in \mathbb{C}$ como:*

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt, \tag{6.1}$$

o abreviadamente

$$\mathcal{L}[f](z) = F(z),$$

y siempre que esa integral impropia exista y sea finita.

Como sabemos la convergencia de $\int_0^\infty \left|e^{-zt} f(t)\right| dt$ implica la convergencia de 6.1, además es condición necesaria que ocurra

$$\lim_{t \to \infty} \left|e^{-zt} f(t)\right| = 0.$$

Definición 6.7 *Denotaremos por $\mathcal{D}_f$ al dominio o región de convergencia (*ROC*) de la transformada de Laplace de una señal $f(t)$, que será el conjunto de números complejos donde está definida la transformada de Laplace de $f(t)$, es decir, el conjunto de números complejos para los que la integral sea convergente.*

$$\mathcal{D}_f = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{L}[f](z) \text{ existe y es finita}\}.$$

Como $f(t)$ está definida en tiempo t, se dice que $f(t)$ está definida en el dominio temporal, *mientras que $F(z)$ está definida en el plano z o* plano de Laplace.

Existe un tipo de función para las que es posible calcular la transformada de Laplace.

Definición 6.8 *Una función $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es de* orden exponencial *cuando $t \to \infty \Leftrightarrow \exists M, T > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ de forma que se cumple*

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad t \geq T.$$

Esta definición indica que si $f(t)$ es de orden exponencial, entonces crece más lento que una función exponencial de la forma $Me^{\gamma t}$.

La función e^{3t} es de orden exponencial, mientras que e^{t^2} no lo sería.

Definición 6.9 *Denotaremos por $\mathcal{E}$ al conjunto de las funciones continuas a trozos de orden exponencial.*

Proposición 6.1 *Sea $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ se cumple*

$$f \in \mathcal{E} \Rightarrow \exists \mathcal{L}[f](z); \quad \forall \operatorname{Re}(z) > \gamma.$$

La proposición anterior indica que la transformada de Laplace existe al menos en el semiplano a la derecha de γ y por tanto debe ocurrir

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \gamma\} \subset D_f,$$

siendo D_f la región o dominio de convergencia de $\mathcal{L}[f](z)$.

Si ahora definimos

$$\rho = \text{ínf}\left\{\gamma \in \mathbb{R} : \exists M > 0 \text{ tal que } |f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad \forall t \geq 0\right\},$$

y

$$D_f^* = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \gamma\},$$

está claro que

$$D_f^* \subseteq D_f.$$

6.3. Cálculo de algunas transformadas de Laplace

En esta sección vamos a calcular la transformada de Laplace de algunas funciones notables.

Función de Heaviside

Vamos a calcular la transformada de Laplace de la función de Heaviside de parámetro $a > 0$

$$f(t) = h_a(t); \qquad a > 0,$$

Para ello utilizaremos la definición directa de transformada de Laplace

$$F(z) = \mathcal{L}[f](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt} h_a(t)\, dt = \int_0^a h_a(t)\, e^{-zt} dt + \int_a^\infty h_a(t)\, e^{-zt} dt,$$

como $h_a(t) = 0$, $\forall t < a$; la primera integral es nula. Mientras que para la segunda y suponiendo $z \neq 0$

$$F(z) = \int_a^\infty h_a(t)\, e^{-zt} dt = \int_a^\infty e^{-zt} dt,$$

$$F(z) = -\frac{1}{z} e^{-tz}\Big|_{t=a}^{t=\infty} = \frac{1}{z}\left(e^{-az} - \lim_{t\to\infty} e^{-tz}\right).$$

Se puede demostrar que el límite sólo existe si $Re(z) > 0$ y en ese caso su valor es cero, así

$$F(z) = \frac{e^{-az}}{z}, \qquad Re(z) > 0.$$

En particular si $a = 0$

$$\mathcal{L}[h_0(t)](z) = \frac{1}{z}, \qquad Re(z) > 0.$$

Nos queda saber qué ocurre en $z = 0$

$$\mathcal{L}[f](0) = \int_0^\infty e^{-0t} f(t)\, dt = \int_0^\infty h_a(t)\, dt = \int_a^\infty 1 dt = \lim_{t\to\infty} t - a = \infty.$$

y por tanto no existe.

Función exponencial

Vamos a calcular la transformada de Laplace de la función exponencial

$$f(t) = e^{\omega t}; \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

Utilizando directamente la definición de transformada de Laplace

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt} e^{\omega t} dt = \int_0^\infty e^{t(\omega - z)} dt.$$

Suponiendo que $z \neq \omega$ obtenemos

$$F(z) = \frac{1}{\omega - z} e^{t(\omega - z)} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{\omega - z} \left(\lim_{t\to\infty} e^{t(\omega - z)} - 1 \right),$$

y el límite existe siempre que $Re(\omega - z) < 0$ (en ese caso su valor será cero):

$$F(z) = \frac{1}{z - \omega} \qquad \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(\omega).$$

Notar en particular que si $\omega = 0$, entonces $F(z) = \frac{1}{z}$ como era de esperar.

Para el caso $z = \omega$

$$F(\omega) = \int_0^\infty e^{-\omega t} e^{\omega t} dt = \int_0^\infty dt = \infty.$$

y la integral sería divergente.

Función potencia

Vamos a calcular la transformada de Laplace para $f_n(t) = t^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

$$F(z) = \mathcal{L}[f_n](z) = \int_0^\infty f_n(t)\, e^{-zt} dt = \int_0^\infty t^n e^{-zt} dt,$$

Si llamamos

$$I_n = \int_0^\infty t^n e^{-zt} dt,$$

y utilizamos integración por partes

$$\begin{aligned} u &= t^n \Rightarrow du = nt^{n-1}dt, \\ dv &= e^{-zt}dt \Rightarrow v = -\frac{1}{z}e^{-zt}, \end{aligned}$$

se obtiene

$$I_n = -\frac{t^n}{z}e^{-zt}\bigg|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{n}{z}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-zt}dt = -\frac{t^n}{z}e^{-zt}\bigg|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{n}{z}I_{n-1} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t^n}{z}e^{-zt}\right) + \frac{n}{z}I_{n-1}.$$

El único valor real para el límite es cero y siempre que $\operatorname{Re} z > 0$; para ese caso se obtiene la siguiente ecuación de recurrencia

$$I_n = \frac{n}{z}I_{n-1}.$$

Repetimos el proceso una y otra vez

$$I_n = \frac{n}{z}I_{n-1} = \frac{n}{z}\frac{n-1}{z}I_{n-2} = \cdots = \frac{n}{z}\frac{n-1}{z}\cdots\frac{1}{z}I_0 = \frac{n!}{z^n}I_0,$$

siendo en este caso I_0

$$I_0 = \int_0^\infty t^0 e^{-zt}dt = \int_0^\infty e^{-zt}dt = \mathcal{L}\left[h_0(t)\right](z) = \frac{1}{z}; \qquad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

y por tanto

$$\mathcal{L}\left[t^n\right](z) = \frac{n!}{z^{n+1}}; \qquad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Funciones Periódicas

Sea $f : [0,\infty[\longrightarrow \infty$ una función periódica de periodo $T > 0$, es decir $f(t+T) = f(t)$ $\forall t \geq 0$, y supongamos que $f(t)$ tiene transformada de Laplace. Utilizando la definición de transformada de Laplace podemos poner

$$F(z) = \mathcal{L}[f](z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}dt = \lim_{s\to\infty}\int_0^s f(t)\, e^{-zt}dt,$$

o de forma equivalente

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^s f(t)\, e^{-zt}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{nT} f(t)\, e^{-zt}dt.$$

Utilizando la aditividad de la integral dentro del límite podemos poner

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{nT} f(t)\,e^{-zt}dt = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{T} f(t)\,e^{-zt}dt + \cdots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(t)\,e^{-zt}dt\right),$$

o en forma de sumatorio

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{nT} f(t)\,e^{-zt}dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,e^{-zt}dt.$$

Para cada una de las integrales dentro del sumatorio hacemos el cambio de variable $t = s + kT$ (o $s = t - kT$)

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,e^{-zt}dt = \int_0^{T} f(s+kT)\,e^{-z(s+kT)}dt = \int_0^{T} f(s+kT)\,e^{-zs}e^{-zkT}ds,$$

como f es periódica se cumple $f(s+kT) = f(s)$ y cada integral queda

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,e^{-zt}dt = \int_0^{T} f(s+kT)\,e^{-zs}e^{-zkT}ds = e^{-zkT}\int_0^{T} f(s)\,e^{-zs}ds,$$

sustituyendo en el sumatorio podemos sacar factor común el correspondiente a la integral

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-zkT}\int_0^{T} f(s)\,e^{-zs}ds = \int_0^{T} f(s)\,e^{-zs}ds\sum_{k=0}^{n-1} e^{-zkT}.$$

El sumatorio es la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón e^{-zT}

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-zkT} = \left(\frac{1-e^{-znT}}{1-e^{-zT}}\right),$$

por tanto

$$\int_0^{nT} f(t)\,e^{-zt}dt = \left(\int_0^{T} f(s)\,e^{-zs}ds\right)\left(\frac{1-e^{-znT}}{1-e^{-zT}}\right).$$

El límite queda

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-zt}dt &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{nT} f(t)\,e^{-zt}dt = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{T} f(s)\,e^{-zs}ds\right)\frac{1-e^{-znT}}{1-e^{-zT}} \\
&= \left(\int_0^{T} f(s)\,e^{-zs}ds\right)\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-znT}}{1-e^{-zT}}.
\end{aligned}$$

Y este límite sólo existe cuando e^{-nzT} tiende hacia 0, es decir cuando $\operatorname{Re}(z) > 0$, de donde

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt = \frac{1}{1 - e^{-zT}} \int_0^T f(s) e^{-zs} ds; \qquad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Ejemplo 6.3 *Encuentra la transformada de Laplace de la función periódica de periodo 2 definida en $[0,2]$ como:*

$$f(t) = \begin{cases} t & t \in [0,1] \\ \\ 0 & t \in]1,2] \end{cases}.$$

Solución: *Utilizando la expresión obtenida y para $T = 2$ obtenemos*

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{1}{1 - e^{-z2}} \int_0^2 f(s) e^{-zs} ds,$$

y el valor de la integral será

$$\int_0^2 f(s) e^{-zs} ds = \int_0^1 f(s) e^{-zs} ds + \int_1^2 f(s) e^{-zs} ds = \int_0^1 te^{-zs} ds + \int_1^2 0e^{-zs} ds = \int_0^1 te^{-zs} ds.$$

Integrando por partes tomando $u = t$ y $dv = e^{-zt} dt$, de formar que $du = dt$ y $v = -\frac{1}{z} e^{-zt}$

$$\int_0^1 te^{-zs} ds = -\frac{t}{z} e^{-zt} \Big|_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \frac{1}{z} e^{-zt} ds = -\frac{1}{z} e^{-z} + -\frac{1}{z^2} e^{-zt} \Big|_{t=0}^{t=1} = -\frac{1}{z} e^{-z} + \frac{1}{z^2} - \frac{e^{-z}}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 - e^{-z}\right) - \frac{1}{z} e^{-z}.$$

Finalmente la transformada de Laplace de $f(t)$ será

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{1}{1 - e^{-z2}} \left(\frac{1}{z^2} \left(1 - e^{-z}\right) - \frac{1}{z} e^{-z} \right)$$

6.4. Propiedades de la tranformada de Laplace

Linealidad

Sean $f, g : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Supongamos que existen $\mathcal{L}[f](z)$ para $z \in D_f$ y $\mathcal{L}[g](z)$ para $z \in D_g$, entonces

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](z) = \alpha \mathcal{L}[f](z) + \beta \mathcal{L}[g](z); \text{ para } z \in D_f \cap D_g$$

Ejemplo 6.4 *Aplicaremos la propiedad para el cálculo de la transformada de Laplace de las funciones trigonométricas e hiperbólicas.*

- ***Función característica de intervalo:*** *Para calcular la transformada de Laplace de la función* $\chi_{[a,b[}(t)$*, utilizamos su expresión en términos de la función de Heaviside*

$$\chi_{[a,b[}(t) = h_a(t) - h_b(t),$$

aplicamos la propiedad de linealidad

$$\mathcal{L}\left[\chi_{[a,b[}(t)\right](z) = \mathcal{L}\left[h_a(t) - h_b(t)\right](z) = \mathcal{L}\left[h_a(t)\right](z) - \mathcal{L}\left[h_b(t)\right](z),$$

y utilizamos que $\mathcal{L}\left[h_a(t)\right](z) = e^{-az}/z$ *para obtener*

$$\mathcal{L}\left[h_a(t)\right](z) - \mathcal{L}\left[h_b(t)\right](z) = \frac{e^{-az}}{z} - \frac{e^{-bz}}{z} = \frac{e^{-az} - e^{-bz}}{z}.$$

En este caso la transformada sí está definida para $z = 0$*, ya que*

$$\mathcal{L}\left[\chi_{[a,b[}(t)\right](0) = \int_0^\infty \chi_{[a,b[}(t) = \int_a^b 1dt = b - a,$$

que coincide con

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{-az} - e^{-bz}}{z} = (L'H\hat{o}pital) = \lim_{z\to 0} \frac{-ae^{-az} + be^{-bz}}{1} = b - a.$$

- ***Funciones trigonométricas:*** *Aunque podemos realizar la transformada de Laplace de las funciones trigonométricas elementales* $\cos t$ *y* $\operatorname{sen} t$ *de forma directa*

$$\mathcal{L}\left[\cos(t)\right](z) = \int_0^\infty e^{-zt}\cos(t)\,dt,$$

utilizando integración por partes, es más rápido utilizar su definición en términos de la función exponencial

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}, \\ \operatorname{sen}(t) &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{it} - \frac{1}{2i}e^{-it}, \end{aligned}$$

y aplicar la propiedad de linealidad

$$\mathcal{L}\left[\cos(t)\right](z) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}\right](z) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{it}\right](z) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-it}\right](z).$$

Sabemos que para $\omega \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}\left[e^{\omega t}\right](z) = \frac{1}{z-\omega}$ *siempre que* $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re}\omega$ *, por tanto si* $\omega = i$

$$\mathcal{L}\left[e^{it}\right](z) = \frac{1}{z-i} \text{ en } D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} i = 0\},$$

y si $\omega = -i$

$$\mathcal{L}\left[e^{-it}\right](z) = \frac{1}{z+i} \text{ en } D_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} -i = 0\},$$

luego

$$\mathcal{L}[\cos(t)](z) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{it}\right](z) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-it}\right](z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+i} = \frac{z}{z^2+1},$$

con $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. *Del mismo modo obtenemos*

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](z) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left[e^{it}\right](z) - \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left[e^{-it}\right](z) = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z^2+1}$$

en el conjunto $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

- ***Funciones Hiperbólicas:*** *Teniendo en cuenta que*

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t},$$
$$\operatorname{senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t},$$

volvemos a utilizar la transformada de Laplace de la función exponencial para el caso $\omega = 1$

$$\mathcal{L}\left[e^{t}\right](z) = \frac{1}{z-1} \text{ en } D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} 1 = 1\},$$

y el caso $\omega = -1$

$$\mathcal{L}\left[e^{-t}\right](z) = \frac{1}{z+1} \text{ en } D_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} -1 = -1\},$$

y por tanto

$$\mathcal{L}[\cosh t](z) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{t}\right](z) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-t}\right](z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} = \frac{z}{z^2-1} \text{ en } D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$$
$$\mathcal{L}[\operatorname{senh} t](z) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{t}\right](z) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-t}\right](z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z^2-1} \text{ en } D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$$

Ejemplo 6.5 *Calcularemos la transformada de Laplace de la función*

$$f(t) = e^{-t}h_0(t) + e^{-2t}h_0(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

por linealidad:

$$\mathcal{L}\left[e^{-t}h_0(t) + e^{-2t}h_0(t)\right](z) = \mathcal{L}\left[e^{-t}h_0(t)\right](z) + \mathcal{L}\left[e^{-2t}h_0(t)\right](z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2}$$

En este caso

$$D_{f_1}(z) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > -1\},$$
$$D_{f_2}(z) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > -2\},$$

luego

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > -1\}.$$

Primer Teorema de Traslación

Teorema 6.2 *Dada $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ y supongamos que existe $\mathcal{L}[f](z)$ para $z \in D_f \subseteq \mathbb{C}$, entonces si $\omega \in \mathbb{C}$ entonces*

$$\mathcal{L}\left[e^{\omega t} f(t)\right](z) = \mathcal{L}[f](z - \omega) \ \ \textit{para} \ \ (z - \omega) + D_f.$$

Ejemplo 6.6 *Calcula la transformada de Laplace de la función*

$$f(t) = t^2 e^{3t}.$$

Solución: Utilizando este primer teorema de traslación tendremos

$$\mathcal{L}\left[t^2 e^{3t}\right](z) = \mathcal{L}\left[t^2\right](z - 3); \qquad z - 3 \in D_f,$$

por otra parte sabemos que

$$\mathcal{L}[t^n](z) = \frac{n!}{z^{n+1}}; \qquad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Por tanto

$$\mathcal{L}\left[t^2 e^{3t}\right](z) = \mathcal{L}\left[t^2\right](z - 3) = \frac{2!}{(z-3)^3}; \qquad \mathrm{Re}(z) > 3.$$

Segundo Teorema de Traslación

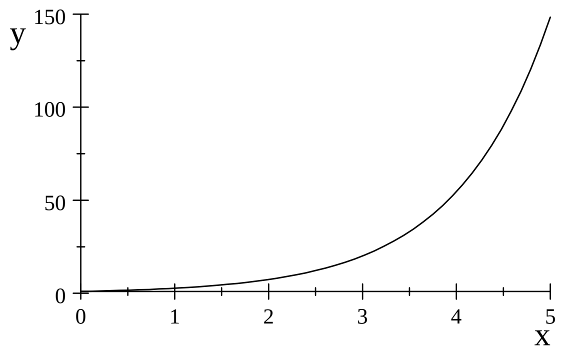
Teorema 6.3 *Dada $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, supongamos que existe $\mathcal{L}[f](z)$ para $z \in D_f \subseteq \mathbb{C}$, entonces si $a > 0$ y definimos la función $f_a(t)$ como*

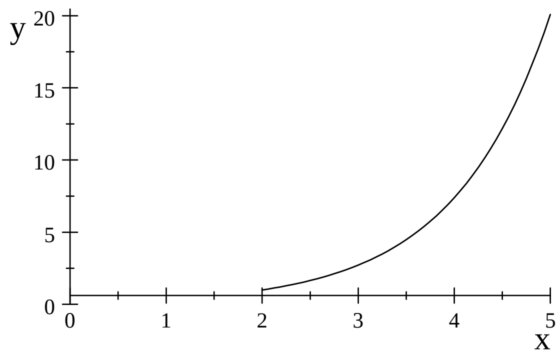
$$f_a(t) = h_a(t) f(t - a) = \begin{cases} f(t-a) & t \in (a, \infty) \\ 0 & t \in [0, a] \end{cases},$$

entonces

$$\mathcal{L}[f_a](z) = \mathcal{L}[h_a(t) f(t-a)](z) = e^{-az}\mathcal{L}[f](z); \ \forall z \in \ D.$$

La función $f_a(t)$ es una versión trasladada de la función $f(t)$:





Ejemplo 6.7 *Calcula la transformada de Laplace de la función:*

$$f(t) = h_3(t)\operatorname{sen}(t-3)$$

Solución: Utilizando directamente el segundo teorema de traslación

$$\mathcal{L}[h_3(t)\operatorname{sen}(t-3)](z) = e^{-3z}\mathcal{L}[\operatorname{sen} t](z) = \frac{e^{-3z}}{z^2+1}; \qquad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Ejemplo 6.8 *Calcula la transformada de Laplace de la función:*

$$f(t) = h_4(t)\cos(t)$$

Solución: En este caso para poder utilizar el segundo teorema de traslación, hay que relizar unas modificaciones. Por una parte está claro que $a = 4$, así que sumamos y restamos 4 al argumento de la función que acompaña a la función de Heaviside

$$\mathcal{L}[h_4(t)\cos(t)](z) = \mathcal{L}[h_4(t)\cos(t-4+4)](z),$$

apliquemos ahora las razones trigonométricas correspondientes para el coseno de una suma

$$\mathcal{L}[h_4(t)\cos((t-4)+4)](z) = \mathcal{L}[h_4(t)(\cos(t-4)\cos(4) - \operatorname{sen}(t-4)\operatorname{sen}(4))](z).$$

utilizando linealidad

$$\mathcal{L}[h_4(t)\cos((t-4)+4)](z) = \cos(4)\mathcal{L}[h_4(t)\cos(t-4)](z) - \operatorname{sen} 4\mathcal{L}[h_4(t)\operatorname{sen}(t-4)](z),$$

y ahora sí que podemos aplicar el 2 teorema de traslación

$$\mathcal{L}[h_4(t)\cos((t-4)+4)](z) = \cos(4)\frac{z-4}{(z-4)^2+1} - \operatorname{sen}(4)\frac{1}{(z-4)^2+1}; \qquad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Cambio de escala

Teorema 6.4 *Dada*

$$f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$$

y sea $a > 0$. *Si existe* $\mathcal{L}[f](z)$ *para* $z \in D_f \subseteq \mathbb{C}$ *y definimos la función* $g(t)$ *como*

$$g(t) = f(at)\,;\ \forall t \in [0, \infty[\,,$$

entonces

$$\mathcal{L}[g](z) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{z}{a}\right) \text{ para } \frac{z}{a} \in D_f.$$

La función $g(t)$ se obtiene mediante un cambio de escala en $f(t)$, esto implica bien una contracción hacia 0 si $a < 1$ o expandirla si $a > 1$.

Ejemplo 6.9 *Sabiendo que*

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} t](z) = \frac{1}{z^2+1}; \qquad \operatorname{Re} z > 0,$$

entonces si $a > 0$

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} at](z) = \frac{1}{a}\frac{1}{1+(z/a)^2} = \frac{1}{a}\frac{a^2}{a^2+z^2} = \frac{a}{a^2+z^2}; \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

Convolución

Definición 6.10 *Dadas dos funciones* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *se define su* producto de convolución *como*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g(t-s)\, ds.$$

Se puede comprobar con un simple cambio de variable que el producto de convolución así definido tiene la propiedad conmutativa:

$$(f * g)(t) = (g * f)(t)\,.$$

En el caso de que las funciones estén definidas en $[0, \infty[$, *siendo nulas fuera de ese intervalo, el producto de convolución se transforma en*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)\, g(t-s)\, ds.$$

Teorema 6.5 *Sean dos funciones* $f, g : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. *Se cumple*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } F(z) = \mathcal{L}[f(t)](z)\,; & z \in D_f \\ \quad\quad y & \\ \text{Si } G(z) = \mathcal{L}[g(t)](z)\,; & z \in D_g \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{L}[(f * g)(t)](z) = F(z)\, G(z)\,; X_2(s) \quad z \in D_f \cap D_g.$$

El teorema indica que: "La transformada de Laplace del producto de convolución de dos funciones es el producto habitual de las transformadas de Laplace de esas dos funciones".

La región de convergencia del producto contiene a la intersección de las dos regiones pero puede ser un conjunto mayor; por ejemplo, si $F(z) = \frac{z+1}{z+2}$ con ROC el conjunto $\{z \in \mathbb{C}|\ Re(z) > -2\}$ y $G(z) = \frac{z+2}{z+1}$ con ROC el conjunto $\{z \in \mathbb{C}|\ Re(z) > -1\}$, el producto $F(z)\,G(z) = 1$ está definido para cualquier valor de z.

Diferenciación respecto al tiempo

Definición 6.11 *Sea $f \in \mathcal{E}$, diremos que $f(t)$ es derivable a trozos si es continua, existen las derivadas laterales en $t \in [0, \infty[$ y en cada subintervalo $[a, b] \subset [0, \infty[$ existe a lo sumo una cantidad finita de puntos donde f no es derivable.*

Teorema 6.6 *Sea $f \in \mathcal{E}$ derivable a trozos y supongamos que existe $\mathcal{L}[f(t)](z)$ para $z \in D_f$; se cumple:*

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right](z) = z\mathcal{L}[f(t)](z) - f(0)\,; \quad z \in D_f.$$

Se entiende el valor de $f(0)$ como el valor del límite a la derecha, es decir

$$f(0) = \lim_{t \to 0^+} f(t)\,.$$

Si la función tiene derivadas de orden superior, la transformada de Laplace se calcula de forma iterativa, por ejemplo para la derivada segunda se tiene en cuenta que $f''(t)$ es la derivada de la derivada primera. Si llamamos $g(t) = f'(t)$, entonces $g'(t) = f''(t)$ y si aplicamos el teorema tendremos

$$\mathcal{L}\left[g'(t)\right](z) = z\mathcal{L}[g(t)](z) - g(0)\,;$$

es decir

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right](z) = z\mathcal{L}\left[f'(t)\right](z) - f'(0)\,;$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f''(t)\right](z) &= z\left(z\mathcal{L}[f(t)](z) - f(0)\right) - f'(0) \\ &= z^2\mathcal{L}[f(t)](z) - zf(0) - f'(0)\,. \end{aligned}$$

Para las derivadas de orden superior tendremos la siguiente fórmula de cálculo

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right](z) = z^n\mathcal{L}[f(t)](z) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\,,$$

o en forma más compacta

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right](z) = z^n\mathcal{L}[f(t)](z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1}f^{(k)}(0)\,,$$

considerando

$$f^{(0)}(t) = f(t)\,.$$

Diferenciación en el plano z

Si consideramos la transformada de Laplace como una función compleja de variable compleja dentro de su dominio de definición, nos preguntamos si dicha función es holomorfa dentro de dicho dominio.

Teorema 6.7 *Sea $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ y supongamos que existe la transformada de Laplace de f en $z \in D_f$. Entonces para $n \in \mathbb{N}$, la función $t^n f(t)$ tiene transformada de Laplace y se cumple*

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}(\mathcal{L}[f(t)](z)); \qquad z \in D_f.$$

Ejemplo 6.10 *Calcula la transformada de Laplace de la función:*

$$f(t) = t \operatorname{sen}(3t)$$

Solución: Utilizando directamente el teorema

$$\mathcal{L}[t \operatorname{sen}(3t)](z) = -\frac{d}{dz}\mathcal{L}[\operatorname{sen} 3t](z).$$

La transformada de $\operatorname{sen}(3t)$ se obtiene utilizando la propiedad de cambio de escala

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} 3t](z) = \frac{1}{3}\mathcal{L}[\operatorname{sen} t]\left(\frac{z}{3}\right)$$

y teniendo en cuenta que

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} t](z) = \frac{1}{z^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}[\operatorname{sen} t]\left(\frac{z}{3}\right) = \frac{9}{z^2+9};$$

obtenemos el resultado

$$\mathcal{L}[t \operatorname{sen}(3t)](z) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{3}\frac{9}{z^2+9}\right) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{3}{z^2+9}\right) = -\frac{-6z}{(z^2+9)^2} = \frac{6z}{(z^2+9)^2}; \qquad \operatorname{Re}(z) > 0$$

Ejemplo 6.11 *Calcula la transformada de Laplace de la función:*

$$f(t) = t^2 e^t$$

Solución: Utilizando directamente el teorema

$$\mathcal{L}\left[t^2 e^t\right](z) = (-1)^2 \frac{d^2}{dz^2}\mathcal{L}\left[e^t\right](z).$$

La transformada de e^t es tomando $\omega = 1$ en la exponencial

$$\mathcal{L}\left[e^t\right](z) = \frac{1}{z-1},; \qquad \operatorname{Re}(z) > 1$$

así que

$$\mathcal{L}\left[t^2 e^t\right](z) = \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{-1}{(z-1)^2}\right) = \frac{2}{(z-1)^3}; \qquad \operatorname{Re}(z) > 1.$$

Encontramos el mismo valor si aplicamos el primer teorema de traslación sobre la función t^2

$$\mathcal{L}\left[t^2\right](z) = \frac{2!}{z^3} \Rightarrow \mathcal{L}\left[t^2 e^t\right](z) = \mathcal{L}\left[t^2\right](z-1) = \frac{2!}{(z-1)^3}.$$

Integración en el dominio temporal

Teorema 6.8 *Sea* $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *y supongamos que existe la transformada de Laplace de* f *en* $z \in D_f$*. Supongamos que* $f(t)$ *admite primitiva*

$$g(t) = \int_0^t f(r)\, dr,$$

entonces $g(t)$ *tiene transformada de Laplace y se cumple*

$$\mathcal{L}[g(t)](z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}[f(t)](z); \quad \text{con } z \in D_f \cap \{Re(z) > 0\}.$$

6.5. Teoremas inicial y final

Teorema 6.9 *Sea* $f \in \mathcal{E}$ *entonces se cumple*

$$\lim_{\operatorname{Re} z \longrightarrow +\infty} \mathcal{L}[f(t)](z) = 0.$$

Este teorema afecta a las transformadas de Laplace de funciones continuas a trozos de orden exponencial, al principio del tema se ha indicado que el dominio de este tipo de funciones es un semiplano a la derecha, este teorema nos indica que dichas transformadas tienden a 0 *cuando* $\operatorname{Re} z$ *tiende a* ∞*. Este resultado sirve por ejemplo para determinar que no hay ninguna función* f *continua a trozos de orden exponencial cuya transformada de Laplace sea* $F(z) = 1$*, ya que para este caso*

$$\lim_{\operatorname{Re} z \longrightarrow +\infty} F(z) = 1 \neq 0,$$

lo que no quiere decir que exista otro tipo de función $\notin \mathcal{E}$*, que tenga por transformada a* $F(z)$*, de hecho*

$$\mathcal{L}[\delta(t)](z) = 1,$$

siendo $\delta(t)$ *la llamada función impulso unitario o función delta de* Dirac*, que puede describirse como*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \text{y además} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1,$$

aunque esta función no es una función en sentido formal sino una distribución, de ahí que no esté en el conjunto $\mathcal{E}$*.*

Teorema 6.10 (Valor inicial) *Sea* $f \in \mathcal{E}$ *derivable, de forma que* $f' \in \mathcal{E}$*. Entonces se cumple*

$$\lim_{\operatorname{Re} z \longrightarrow +\infty} z\mathcal{L}[f(t)](z) = f(0).$$

Observación 6.2 *El teorema es válido cuando la función* $f(t)$ *no tiene impulsos, deltas o derivadas de deltas en el origen. La función* $F(z)$ *debe ser una función racional propia* $F(z) = N(z)/D(z)$ *con* $\deg(N) < \deg(D)$*.*

Teorema 6.11 (Valor final) *Sea* $f \in \mathcal{E}$ *derivable, de forma que* $0 \in \mathcal{D}_f$*. Entonces si existe y es fínito el* $\lim_{t \longrightarrow +\infty} f(t)$*, entonces*

$$\lim_{\operatorname{Re} z \longrightarrow 0} z\mathcal{L}[f(t)](z) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} f(t).$$

Observación 6.3 *Este teorema es válido cuando* $F(z)$ *no tiene polos en el semiplano derecho, ni en el eje imaginario.*

6.6. Transformada inversa de Laplace

Definición 6.12 *Sea* $F(z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$*, diremos que* $f(t)$ *es la transformada inversa de Laplace, o una transformada inversa de* $F(z)$ *y escribimos:*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(z)](t)$$

Como

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt,$$

se puede deducir de inmediato que la transformada inversa no es única, por ejemplo, las funciones dadas por

$$\text{a) } f(t) = e^{-2t} \qquad \text{b) } g(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \neq 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases},$$

verifican que

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \mathcal{L}[g(t)](z) = \frac{1}{z+2}.$$

Aquí utilizaremos funciones continuas a trozos de orden exponencial y como tales, supondremos que las transformadas inversas son únicas.

Ejemplo 6.12 *Puesto que*

$$\mathcal{L}\left[e^{\omega t}\right](z) = \frac{1}{z-\omega},$$

se deduce que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z-\omega}\right](t) = e^{\omega t}.$$

En sentido estricto deberíamos decir que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z-\omega}\right](t) = e^{\omega t} h_0(t),$$

ya que estamos definiendo la transformada de Laplace para $t \geq 0$*.*

Ejemplo 6.13 *Puesto que*

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} \omega t](z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2},$$

se deduce que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{z^2+\omega^2}\right](t) = \operatorname{sen} \omega t, \quad [t \geq 0].$$

6.7. Propiedades de la transformada inversa

Como en el caso de la transformada directa, la transformada inversa de Laplace tiene algunas propiedades que nos va a permitir su cálculo de forma más fácil.

Linealidad

Para cualquier par de complejos $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, se cumple:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\alpha F(z)+\beta G(z)\right](t)=\alpha\mathcal{L}^{-1}\left[F(z)\right](t)+\beta\mathcal{L}^{-1}\left[G(z)\right](t).$$

Ejemplo 6.14 *Encuentra*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+3)(z-2)}\right](t).$$

Solución: Descomponemos la función en fracciones simples en la forma usual

$$\frac{1}{(z+3)(z-2)}=\frac{-\frac{1}{5}}{z+3}+\frac{\frac{1}{5}}{z-2},$$

y aplicamos la propiedad de linealidad

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+3)(z-2)}\right](t) &= -\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+3)}\right](t)+\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-2)}\right](t)\\ &= -\frac{1}{5}e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{2t}.\end{aligned}$$

Ejemplo 6.15 *Encuentra*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+1}{z^2(z^2+9)}\right](t).$$

Solución: Descomponemos la función en fracciones simples

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z^2(z^2+9)} &= \frac{\frac{1}{9}}{z}+\frac{\frac{1}{9}}{z^2}-\frac{1}{9}\frac{z+1}{z^2+9}\\ &= \frac{\frac{1}{9}}{z}+\frac{\frac{1}{9}}{z^2}-\frac{1}{9}\frac{z}{z^2+3^2}-\frac{1}{27}\frac{3}{z^2+3^2},\end{aligned}$$

y aplicamos linealidad

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+1}{z^2(z^2+9)}\right](t) &= \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t)+\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t)-\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+3^2}\right](t)-\frac{1}{27}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{z^2+3^2}\right](t)\\ & \frac{1}{9}h_0(t)+\frac{1}{9}t-\frac{1}{9}\cos 3t-\frac{1}{27}\operatorname{sen} 3t.\end{aligned}$$

Traslación

Teorema 6.12 *Sea* $\omega \in \mathbb{C}$*, entonces*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F\left(z-\omega\right)\right](t) = e^{\omega t}\mathcal{L}^{-1}\left[F\left(z\right)\right](t).$$

Ejemplo 6.16 *Calcula*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(z+2\right)^{2}}\right](t).$$

Solución: Puesto que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^{2}}\right](t) = t,$$

el primer teorema de traslación nos conduce a

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(z+2\right)^{2}}\right](t) = te^{-2t}.$$

Ejemplo 6.17 *Calcula*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{z^{2}+6s+13}\right](t).$$

Solución: Calculamos las raíces del denominador de la función

$$z^{2}+6z+13=0,$$

que tiene por soluciones

$$z = \frac{-6\pm\sqrt{36-52}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{-6\pm 4i}{2} = -3\pm 2i,$$

y por tanto

$$z^{2}+6z+13 = \left(z+3\right)^{2}+2^{2}.$$

De esta forma

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{z^{2}+6s+13}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{\left(z+3\right)^{2}+2^{2}}\right](t),$$

aplicando la propiedad de traslación

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{\left(z+3\right)^{2}+2^{2}}\right](t) = e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{z^{2}+2^{2}}\right](t) = e^{-3t}\operatorname{sen}2t.$$

Teorema 6.13 *Sea* $a>0$*, entonces*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-az}F\left(z\right)\right](t) = h_{a}\left(t\right)f\left(t-a\right).$$

Ejemplo 6.18 *Calcula*
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3z}}{z^3}\right](t).$$

Solución: Utilizando el segundo teorema de traslación
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3z}}{z^3}\right](t)=\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-3z}\frac{1}{z^3}\right](t)=h_3(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^3}\right](t-3)$$
y como
$$\mathcal{L}\left[t^n\right](t)=\frac{n!}{z^{n+1}},$$
entonces
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^3}\right](t)=\frac{1}{2!}t^2,$$
de esta forma
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3z}}{z^3}\right](t)=h_3(t)\,\frac{1}{2!}(t-3)^2.$$

Convolución

Teorema 6.14 *Se cumple*
$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(z)\,G(z)\right](t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(z)\right](t)*\mathcal{L}^{-1}\left[G(z)\right](t).$$

Ejemplo 6.19 *Calcula*
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z+2)^2}\right](t).$$

Solución: Utilizando la convolución
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z+2)^2}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\frac{1}{(z+2)^2}\right](t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t)*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+2)^2}\right](t)\\ &= f(t)*g(t),\end{aligned}$$
siendo
$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t)=t,\\ g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+2)^2}\right](t)=te^{-2t},\end{aligned}$$
luego
$$f*g=g*f=\int_0^t g(s)\,f(t-s)\,ds=\int_0^t se^{-2s}(t-s)\,ds=t\int_0^t se^{-2s}ds-\int_0^t s^2e^{-2s}ds,$$

y calculando cada integral. La primera por partes $u = s$ y $dv = e^{-2s}ds$, por tanto $du = ds$ y $v = -\frac{1}{2}e^{-2s}$

$$\begin{aligned}\int_0^t se^{-2s}ds &= -s\frac{1}{2}e^{-2s}\Big|_{s=0}^{s=t} + \frac{1}{2}\int e^{-2s}ds \\ &= -t\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2s}\Big|_{s=0}^{s=t} \\ &= -t\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Funciones racionales

Cuando $F(z) = P(z)/Q(z)$ es una función racional con coeficientes reales con $\deg(P) \leq \deg(Q)$, entonces el cálculo de su transformada inversa pasa por descomponer la función en fracciones simples y calcular la inversa de cada una de las fracciones teniendo en cuenta, entre otros, los siguientes resultados

1. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $n > 0$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-\alpha)^n}\right](t) = \frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{(n-1)!}, \qquad t \geq 0.$$

2. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2+\beta^2}\right](t) = e^{\alpha t}\cos\beta t, \qquad t \geq 0.$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\beta}{(z-\alpha)^2+\beta^2}\right](t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t, \qquad t \geq 0.$$

Ejemplo 6.20 *Calcula la transformada inversa de Laplace de*

$$F(z) = \frac{1}{z^2(z+1)^2}.$$

Solución: Si hacemos la descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{z^2(z+1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{(z+1)} + \frac{D}{(z+1)^2},$$

y aplicamos linealidad y los resultados correspondientes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z+1)^2}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{(z+1)} + \frac{D}{(z+1)^2}\right](t) = \\ & A\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t) + B\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t) + C\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)}\right](t) + D\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right](t) \\ &= A + Bt + Ce^{-t} + Dte^{-t}.\end{aligned}$$

Quedan por determinar los coeficientes A, B, C y D; que hacemos de forma usual

$$\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{(z+1)}+\frac{D}{(z+1)^2}=\frac{Az\,(z+1)^2+B\,(z+1)^2+Cz^2\,(z+1)+Dz^2}{z^2\,(z+1)^2}=\frac{1}{z^2\,(z+1)^2},$$

$$\begin{aligned} Az\,(z+1)^2+B\,(z+1)^2+Cz^2\,(z+1)+Dz^2 &= 1 \\ Az^3+(2A+B+C+D)\,z^2+(A+2B)\,z+B &= 1 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ 2A+B+C+D &= 0 \\ A+2B &= 0 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

con solución $A=-2$, $B=1$, $C=2$, $D=1$ y la transformada inversa será

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2\,(z+1)^2}\right](t)=-2+t+2e^{-t}+te^{-t}$$

Ejemplo 6.21 *Calcula la transformada inversa de Laplace de*

$$F\,(z)=\frac{7z-1}{(z+1)\,(z+2)\,(z-3)}$$

Si hacemos la descomposición en fracciones simples

$$\frac{7z-1}{(z+1)\,(z+2)\,(z-3)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-3},$$

y aplicamos linealidad y los resultados correspondientes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7z-1}{(z+1)\,(z+2)\,(z-3)}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-3}\right](t)= \\ & \quad A\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+1}\right](t)+B\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+2}\right](t)+C\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z-3}\right](t) \\ &= Ae^{-t}+Be^{-2t}+Ce^{3t}. \end{aligned}$$

Quedan por determinar los coeficientes A, B, y C; que hacemos de forma usual

$$\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-3}=\frac{A\,(z+2)\,(z-3)+B\,(z+1)\,(z-3)+C\,(z+1)\,(z+2)}{z^2\,(z+1)^2}=\frac{7z-1}{(z+1)\,(z+2)\,(z-3)},$$

$$A\,(z+2)\,(z-3)+B\,(z+1)\,(z-3)+C\,(z+1)\,(z+2)=7z-1$$

y dándole valores a z

$$\begin{aligned}
\text{Si } z &= -1 \Rightarrow A(-1+2)(-1-3) = -8 \Rightarrow A = \frac{-8}{(1)(-4)} = 2 \\
\text{Si } z &= -2 \Rightarrow B(-2+1)(-2-3) = -15 \Rightarrow B = \frac{-15}{(-1)(-5)} = -3 \\
\text{Si } z &= 3 \Rightarrow C(3+1)(3+2) = 20 \Rightarrow C = \frac{20}{(4)(5)} = 1
\end{aligned}$$

y la transformada inversa será

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7z-1}{(z+1)(z+2)(z-3)}\right](t) = 2e^{-t} - 3Be^{-2t} + e^{3t}$$

Ejercicio 6.1 *Calcula la transformada inversa de Laplace de*

$$F(z) = \frac{z^2+9z+2}{(z-1)^2(z+3)}$$

Ejercicio 6.2 *Calcula la transformada inversa de Laplace de*

$$F(z) = \frac{2z^2+10z}{(z^2-2z+5)(z+1)}$$

6.8. Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales

La transformada de Laplace se utiliza para resolver los llamados Problemas de Valor Inicial (P.V.I.) que implican ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma

$$\left\{\begin{array}{c}
a_n x^{(n)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = u(t) \\
x(0) = x_{0,0} \\
x'(0) = x_{1,0} \\
\vdots \\
x^{(n-1)}(0) = x_{n-1,0}
\end{array}\right.$$

siendo $a_j \in \mathbb{R}$, $x^{(k)}(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ es la derivada k-ésima de la función respuesta del sistema $x(t)$ y $x_{k,0} \in \mathbb{R}$ son las llamadas condiciones iniciales del modelo. Este tipo de problemas aparecen, por ejemplo, al modelizar un típico circuito LRC.

El problema se resuelve usando la transformada de Laplace sobre la ecuación y utilizando las propiedades de linealidad y derivación de la transformada y finalmente utilizando la transformada inversa. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 6.22 *Sea el sistema*

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2$$

junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(0) &= 3 \\ y'(0) &= 5 \end{aligned}$$

Calcula utilizando la transformada de Laplace la respuesta del sistema.

Solución: Por una parte tenemos que $x(t) = 2$ y por tanto

$$X(z) = \mathcal{L}[x(t)](z) = \frac{2}{z}$$

y aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación

$$\mathcal{L}\left[y''(t) + 3y'(t) + 2y(t)\right](z) = \mathcal{L}[x(t)](z)$$

aplicando linealidad

$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right](z) + 3\mathcal{L}\left[y'(t)\right](z) + 2\mathcal{L}[y(t)](z) = \mathcal{L}[x(t)](z)$$

y utilizando la propiedad de derivación temporal

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)](z) &= Y(z) \\ \mathcal{L}\left[y'(t)\right](z) &= zY(z) - y(0) \\ \mathcal{L}\left[y''(t)\right](z) &= z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) \end{aligned}$$

$$\left\{z^2Y(z) - zy(0) - y'(0)\right\} + 3\left\{zY(z) - y(0)\right\} + 2zY(z) = \frac{2}{z}$$

Agrupando

$$Y(z)\left\{z^2 + 3z + 2\right\} = \frac{2}{z} + 3z + 14 = \frac{3z^2 + 14z + 2}{z}$$

y despejando $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{3z^2 + 14z + 2}{z\left(z^2 + 3z + 2\right)} = \frac{1}{z} + \frac{9}{z+1} - \frac{7}{z+2}$$

donde hemos descompuesto en fracciones simples y entonces

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(z)](t) = 1 + 9e^{-t} - 7e^{-2t}$$

y podemos comprobar que

$$y(0) = 1 + 9e^0 - 7e^0 = 1 + 9 - 7 = 3,$$

mientras que para $y'(t) = -9e^{-t} + 14e^{-2t}$, tenemos

$$y'(0) = -9e^0 + 14e^0 = -9 + 14 = 5.$$

Ejemplo 6.23 *Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace.*

Función de transferencia.

Dada la ecuación diferencial lineal con coeficientes constnates

$$a_n x^{(n)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 u'(t) + b_0 u(t),$$

siendo $x(t)$ la respuesta del sistema y $u(t)$ la entrada al mismo, entonces se define la función de transferencia como la razón entre la transformada de Laplace de la respuesta y la transformda de Laplace de la entrada

$$T(z) = \frac{X(z)}{U(z)}$$

Estabilidad

Básicamente un sistema será estable si a entrada acotada el sistema responde con una entrada acotada, o equivalentemente, si el sistema no excitado por ninguna entrada, entonces la respuesta del sistema decae a cero cuando t tiende a infinito.

En el caso de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constante, la estabilidad se explica en términos de los polos de la función de transferencia.