Curso 2016/2017
Máster en Ingeniería Industrial
Ampliación de Matemáticas - Problemas
Integración Compleja

1. Calcule las integrales $\int_\gamma f(z)\,dz$ en los siguientes casos:

   a) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ y γ el triángulo de vértices $\{0,\ 1+i,\ 2\}$ orientado negativamente.

   b) $f(z) = \bar{z}$ y γ la curva de la figura 1.

   c) $f(z) = |z|\,\overline{z}$ y γ la curva de la figura 1.

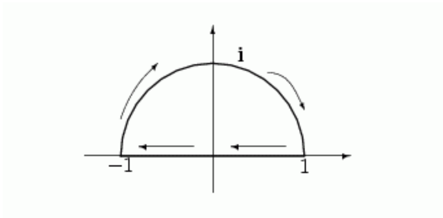

Figura 1.

   d) $f(z) = z/\overline{z}\,dz$ y γ la curva de la figura 2.

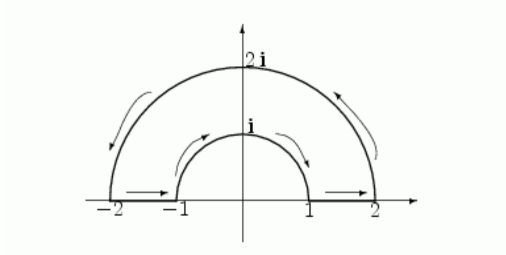

Figura 2.

   e) $f(z) = z^4$ y γ la curva representada en la figura 3, que une los puntos $z_0 = -P + 0i$ y $z_1 = P + 0i$, siendo $P = 8\pi$.

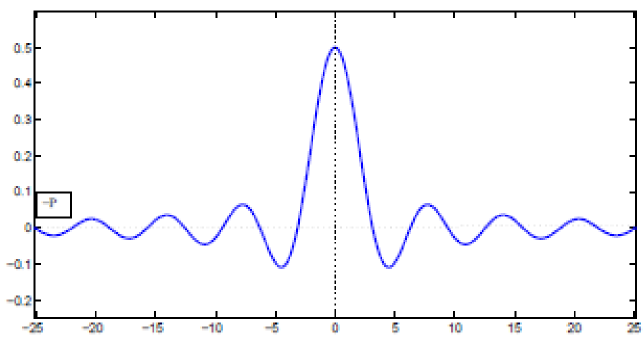

Figura 3

f) $f(z) = ze^z$ y $\gamma(t) = t^2 + it$, con $t \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

g) $f(z) = \operatorname{sen}(\bar{z})$ y γ la curva representada en la figura 4.

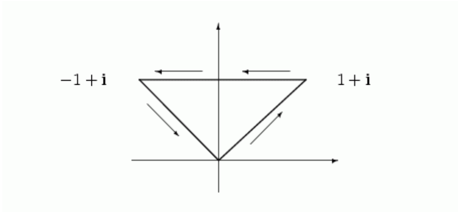

Figura 4.

2. Calcule la integral $\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz$, siendo $\gamma(t) = e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ en cada caso:

   a) Para $|z_0| > 1$

   b) Para $|z_0| < 1$

3. Calcule las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(e^z)}{z}\, dz,\ \gamma(t) = e^{i\,t},\quad t \in [0, 2\pi].$

   b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{(z-1)^2}\, dz,\ \gamma(t) = 1 + \frac{e^{i\,t}}{2},\quad t \in [0, 2\pi]$

   c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\,e^z}{(z-i)^3}\, dz,\ \gamma(t) = i + e^{i\,t},\quad t \in [0, 2\pi]$

4. Calcule para $r > 1$ el valor de la integral

$$\int_\gamma \frac{z}{z^4-1}\, dz, \qquad \gamma(t) = r + r\,e^{i\,t},\quad t \in [0, 2\pi]$$

5. (*) Sea γ la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sabiendo que $\int_\gamma \dfrac{1}{z} dz = 2\pi i$ compruebe que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\,\operatorname{sen}^2(t)}\, dt = \frac{2\pi}{ab}$$

6. Calcule la integral

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z\,(1-z)^3}\, dz$$

   a) Para $\gamma(t) = r\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ con $0 < r < 1$.

   b) Para $\gamma(t) = 1 + r\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ con $0 < r < 1$.

   c) Para $\gamma(t) = re^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ con $1 < r$.

7. Calcule la integral:

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2+9}\, dz$$

a) Para $\gamma(t) = 3\,i + e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

b) Para $\gamma(t) = -2\,i + 2\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

c) Para $\gamma(t) = 4\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

d) Para $\gamma(t) = e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

8. Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$ siendo γ la curva de la figura 5.

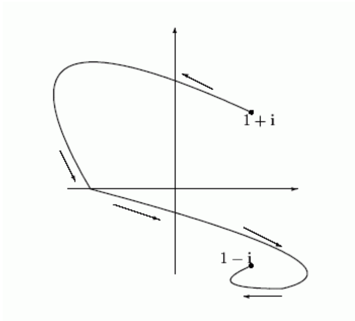

Figura 5.

9. Sea γ el contorno del dominio entre $|z| = 4$ y el cuadrado cuyos lados están en las rectas $x = \pm 1$, e $y = \pm 1$. Suponiendo γ orientado positivamente, justifica que $\int_\gamma f\,(z)\,dz = 0$ para:

$$\text{a) } f\,(z) = \frac{1}{3z^2+1} \qquad \text{b) } f\,(z) = \frac{z+2}{\cos\dfrac{z}{2}} \qquad \text{c) } f\,(z) = \frac{z}{1-e^z}$$

10. Calcule el valor de la integral:

$$\int_\gamma \cos\left(\frac{1}{z+2i}\right)\,dz$$

donde γ es la elipse centrada en el origen de semiejes 2 y 1 y recorrida en sentido positivo.

11. Calcula el valor de la integral $\int_\gamma \overline{z}\,|z|^2\,dz$, siendo γ la curva de la figura 6.

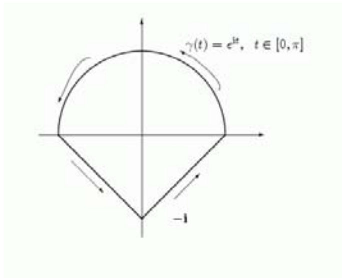

Figura 6.

12. Utilice el teorema de los residuos para calcular las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z^2}\, dz,\ \gamma(t) = 3\, e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$

b) $\displaystyle\int_\gamma \tfrac{z+1}{z^2-2z}\, dz,\ \gamma(t) = 3\, e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$

c) $\displaystyle\int_\gamma \tfrac{z-2}{32z^3-4z^2-z}\, dz,\ \gamma(t) = i + r\, e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$

d) $\displaystyle\int_\gamma \tfrac{z}{(z-1)(z-2)}\, dz,\ \gamma(t) = 2 + \frac{e^{it}}{2},\ t \in [0, 2\pi]$

e) $\int_\gamma \frac{1}{\cos z}\, dz,\ \gamma(t) = 5\, e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$

f) $\displaystyle\int_\gamma \tfrac{1}{1-z^4}\, dz,\ \gamma(t) = \frac{3}{2}\, e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$

13. Calcule, mediante el teorema de los residuos, las integrales reales siguientes:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+\cos t)^2},\quad (a > 1)$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cot(t+a)\, dt,\quad (a \in \mathbb{C} : Im\,(a) \neq 0)$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a\cos t + a^2},\quad (a \in \mathbb{C} : a \neq \pm 1)$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos t^2} dt$

e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4\cos t} dt$

f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 - 3\operatorname{sen} t)^2} dt$

14. Se considera la curva γ igual a la circunferencia de centro 0 y radio 2 y se define la función de variable real:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+1)} dz \qquad t \in (0, +\infty)$$

$a)$ Calcule la expresión de $g(t)$.

$b)$ Compruebe que $\lim_{t\to 0} g(t) = 0$.

15. Se considera la curva γ igual a la circunferencia de centro 0 y radio 2. Aplicando el teorema de los residuos, calcule la expresión de las siguientes funciones de variable real

a) $\displaystyle g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{(zt)}}{z-2} dz \qquad t \in (0, +\infty)$

b) $\displaystyle g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{(zt)}}{(z+1)^2} dz \qquad t \in (0, +\infty)$

(*) Ejercicios con dificultad especial.