AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2011/12

GRADO DE INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

EXAMEN FINAL DE SEPTIEMBRE . 10–9–2012

1. **(20 puntos)** Explique las propiedades de la Transformada de Laplace (esbozando su prueba) que permiten resolver el problema de condiciones iniciales dado por

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t), \\ y(0) = y_0; y'(0) = y_1, \end{cases}$$

Aplíquelo a la resolución del siguiente problema particular

$$\begin{cases} y'' + y' + y = t, \\ y(0) = 0; y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solución: Aplicamos la transformada de Laplace a cada miembro de la ecuación:

$$\mathcal{L}\left[y'' + y' + y\right](z) = \mathcal{L}[t](z)$$

por linealidad de la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left[y''\right](z) + \mathcal{L}\left[y'\right](z) + \mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[t](z)$$

aplicando las propiedades de la transformada de Laplace sobre las funciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y](z) &= Y(z) \\ \mathcal{L}\left[y'\right](z) &= zY(z) - y(0) = zY(z) \\ \mathcal{L}\left[y''\right](z) &= z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) = z^2Y(z) \end{aligned}$$

por tanto sustituyendo en la ecuación

$$z^2Y(z) + zY(z) + Y(z) = \mathcal{L}[t](z) \Rightarrow \left(z^2 + z + 1\right)Y(z) = \mathcal{L}[t](z)$$

y despejando

$$Y(z) = \frac{\mathcal{L}[t](z)}{(z^2 + z + 1)}$$

Falta por calcular la transformada de Laplace de t, puede hacerse mediante la propia definición:

$$\mathcal{L}[t](z) = \int_0^\infty te^{-zt}dt$$

integrando por partes, o utilizando la propiedad de la derivada de la función Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\mathcal{L}[f(t)](z)$$

en nuestro caso $n = 1$ y $f(t) = h_0(t)$ la función de Heaviside (o escalón unitario):

$$\mathcal{L}[t](z) = (-1)\frac{d}{dz}\mathcal{L}[h_0(t)](z) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}$$

Luego

$$Y(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + z + 1)}$$

y calculamos $y(t)$ mediante la transformada inversa de Laplace que realizamos mediante residuos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(z)](t) = \sum_{z_k \text{ singularidad de } Y(z)} \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), z_k\right)$$

Las singularidades de $Y(z)$ son los ceros del denominador:

$$z^2\left(z^2+z+1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 & \text{polo doble} \\ z^2+z+1=0 \Rightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ \beta=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{cases} & \text{polos simples} \end{cases}$$

entonces

$$Y(z)=\frac{1}{z^2(z-\alpha)(z-\beta)}$$

Calculamos los residuos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z),0\right) &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left(z^2e^{zt}Y(z)\right)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{zt}}{z^2+z+1}\right)= \\ &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{te^{zt}\left(z^2+z+1\right)-(2z+1)e^{zt}}{\left(z^2+z+1\right)^2}\right) \\ &= \left(\frac{te^{0\cdot t}\left(0^2+0+1\right)-(2\cdot 0+1)e^{0\cdot t}}{\left(0^2+0+1\right)^2}\right) \\ &= t-1 \end{aligned}$$

El residuo en $z=\alpha$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z),\alpha\right) &= \lim_{z\to\alpha}\left((z-\alpha)e^{zt}Y(z)\right) \\ &= \lim_{z\to\alpha}\left(\frac{e^{zt}}{z^2(z-\beta)}\right) \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2(\alpha-\beta)} \end{aligned}$$

Por ser $Y(z)$ una función racional con coeficientes en $\mathbb{R}$, el residuo en $\beta=\overline{\alpha}$, es el conjugado del residuo en α, por tanto

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z),\beta\right)=\overline{\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2(\alpha-\beta)}}$$

Lo que simplifica los cálculos ya que

$$\begin{aligned}
y(t) &= \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z),0\right)+\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z),\alpha\right)+\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z),\beta\right)\\
&= \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z),0\right)+\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z),\alpha\right)+\overline{\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z),\alpha\right)}\\
&= \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z),0\right)+2\operatorname{Re}\left[\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z),\alpha\right)\right]\\
&= (t-1)+2\operatorname{Re}\left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2(\alpha-\beta)}\right]=(t-1)+2\operatorname{Re}\left[\frac{e^{t\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)}}{\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)}\right]\\
&= (t-1)+2\operatorname{Re}\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}t}e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}\right]=(t-1)+2\operatorname{Re}\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}t}e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{3}\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]\\
&= (t-1)+\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{Re}\left[e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]=(t-1)+\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{3}{2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\\
&= (t-1)+e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}t}{2}
\end{aligned}$$

Podemos comprobar que se cumple la ecuación diferencial y las condiciones iniciales. Obtenemos $y'(t)$

$$\begin{aligned}
y'(t) &= 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}t}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}\\
&= 1-e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}t}{2}
\end{aligned}$$

y también $y''(t)$

$$\begin{aligned}
y''(t) &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}t}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}t}{2}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la EDO:

$$y''+y'+y=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)+\left(1-e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)+\left((t-1)+e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\right.$$

2. **(20 puntos)** Dada la función 2–periódica definida por

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad t\in[0,1)\\ 0 & \text{si} \quad t\in[1,2)\end{cases}$$

se pide:

(a) ¿Tiene dicha función desarrollo en serie de Fourier? En caso afirmativo, explique porqué e indique en qué puntos dicha función sería igual a su serie de Fourier.

(b) Encuentre explícitamente la serie de Fourier de dicha función.

Solución:

3. **(20 puntos)** Resuelva el siguiente problema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} u_t = u_{yy} + 2u & t > 0 \quad 0 < y < 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & t > 0 \\ u(0,y) = \operatorname{sen} y & y \in (0,1) \end{cases}$$

Solución: La ecuación se resuelve mediante el método de separación de variables, suponiendo que la solución solución $u(t,y)$ puede ponerse como

$$u(t,y) = F(t)\,G(y)$$

por tanto

$$\begin{aligned} u_t &= F'(t)\,G(y) \\ u_y &= F(t)\,G'(y) \\ u_{yy} &= F(t)\,G''(y) \end{aligned}$$

que transforma la EDP en

$$u_t = u_{yy} + 2u \Leftrightarrow F'(t)\,G(y) = F(t)\,G''(y) + 2F(t)\,G(y)$$

o abreviadamente

$$F'(t)\,G(y) = F(t)\big(G''(y) + 2G(y)\big)$$

Obviamente la solución trivial $u \equiv 0$ es solución de la EDP, pero obviamente no cumple la condición inicial $u(0,y) = \operatorname{sen} y$, así que buscaremos soluciones alternativas y supondremos que $F(t) \neq 0$ y $G(y) \neq 0$, por tanto se puede dividir por ellas

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(y) + 2G(y)}{G(y)}$$

Como una lado de la igualdad depende sólo de t y el otro depende sólo de y, ambos deben ser constantes

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(y) + 2G(y)}{G(y)} = -\lambda \tag{1}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ (Se elige el signo menos por convención, aunque se puede desarrollar sin esta consideración).

De 1 obtendremos dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} F'(t) + \lambda F(t) &= 0 \\ G''(y) + (2+\lambda)\,G(y) &= 0 \end{aligned}$$

y utilizando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(t,0) &= F(t)\,G(0) = 0 \\ u(t,1) &= F(t)\,G(1) = 0 \end{aligned}$$

siendo t es arbitraria se deduce que

$$G(0) = G(1) = 0$$

Tendremos el problema de contorno

$$\begin{cases} G''(y) + (2+\lambda)\, G(y) = 0 \\ G(0) = 0 \\ G(1) = 0 \end{cases}$$

cuya solución depende del valor de λ.

(a) **Caso I:** $(2+\lambda) = 0$. Supongamos que $2+\lambda = 0$, entonces la ecuación diferencial será

$$G''(y) + (2+\lambda)\, G(y) = 0 \Rightarrow G''(y) = 0$$

cuya solución general es de la forma

$$G(y) = Ay + B$$

Utilizando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \Rightarrow B = 0 \\ G(1) &= 0 \Rightarrow A \cdot 1 + B = 0 \end{aligned}$$

la solución del sistema anterior es: $A = B = 0$, y por tanto obtenemos de nuevo la solución trivial nula, que no cumple la condición inicial.

(b) **Caso II:** $(2+\lambda) < 0$. Supongamos ahora que $(2+\lambda)$ es negativo, y por tanto lo podemos poner de la forma $(2+\lambda) = -a^2$, con $a = \sqrt{|2+\lambda|}$. La ecuación diferencial sería

$$G''(y) + (2+\lambda)\, G(y) = 0 \Rightarrow G''(y) - a^2 G(y) = 0$$

que tiene por solución general

$$G(y) = Ae^{ay} + Be^{-ay}$$

Utilizamos las condiciones de contorno para encontrar los valores de A y B

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \Rightarrow A + B = 0 \\ G(1) &= 0 \Rightarrow Ae^{a} + Be^{-a} = 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema lineal homogéneo en las incógnitas A y B. El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{a} & e^{-a} \end{vmatrix} = e^{-a} - e^{a} = -2\,\mathrm{senh}\,(a)$$

y puesto que $\alpha \neq 0$ es no nulo y por tanto la única solución del sistema es la trivial $A = B = 0$, obteniéndose de nuevo para la EDP la solución trivial.

(c) **Caso III:** $(2+\lambda) > 0$. Supongamos ahora que $(2+\lambda)$ es positivo, y por tanto lo podemos poner de la forma $(2+\lambda) = a^2$, con $a = \sqrt{2+\lambda}$. La ecuación diferencial sería

$$G''(y) + (2+\lambda)\, G(y) = 0 \Rightarrow G''(y) + a^2 G(y) = 0$$

que tiene por solución general

$$G(y) = A\cos ay + B\,\mathrm{sen}\, ay$$

Utilizamos las condiciones de contorno para encontrar los valores de A y B

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \Rightarrow A = 0 \\ G(1) &= 0 \Rightarrow A\cos a + B\operatorname{sen} a = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$B\operatorname{sen} a = 0$$

Como buscamos una solución no trivial, entonces $B \neq 0$ y

$$\operatorname{sen} a = 0 \Leftrightarrow a = n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

y,

$$2 + \lambda = n^2\pi^2, \qquad n \in \mathbb{N}$$

recordemos que λ era una constante arbitraria, luego para cada valor de $n \in \mathbb{N}$, tendremos una posible solución de la EDO,

$$\lambda_n = n^2\pi^2 - 2 \Rightarrow G_n(y) = B_n \operatorname{sen}(n\pi y)$$

Notar que el caso $n = 0$, nos conduce de nuevo a la solución trivial, luego supondremos $n \geq 1$. Para estos valores de λ_n y utilizando la otra ecuación diferencial

$$F'(t) + \lambda F(t) = 0 \Rightarrow F'(t) + \left(n^2\pi^2 - 2\right) F(t) = 0$$

cuya solución para cada $n \in \mathbb{N}$ es de la forma

$$F_n(t) = A_n e^{\left(2-n^2\pi^2\right)t} \qquad A_n \in \mathbb{R}$$

Finalmente, la solución de la EDP será para cada n de la forma

$$u_n(t,x) = F_n(t)\, G_n(x) = A_n B_n \operatorname{sen}(n\pi y)\, e^{\left(2-n^2\pi^2\right)t} = c_n \operatorname{sen}(n\pi y)\, e^{\left(2-n^2\pi^2\right)t}$$

con $c_n = A_n B_n$. Por la linealidad de la Ecuación, cualquier combinación lineal de soluciones, es solución, por tanto podemos considerar como solución general formal a

$$u(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi y)\, e^{\left(2-n^2\pi^2\right)t}$$

y utilizando la condición inicial $u(0,y) = \operatorname{sen}(y)$ se obtiene

$$u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi y) = \operatorname{sen}(y)$$

Los coeficientes c_n son los coeficientes de Fourier de la extensión impar de la función $\operatorname{sen}(y)$ en $[0,1]$, es decir

$$c_n = 2\int_0^1 \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(n\pi y)\, dy$$

Para el cálculo de esta integral utilizamos la fórmula trigonométrica siguiente

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

donde para este caso $\alpha = y$ y $\beta = n\pi y$

$$\operatorname{sen} y \operatorname{sen}(n\pi y) = \frac{1}{2}\left[\cos(y - n\pi y) - \cos(y + n\pi y)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(1-n\pi)\, y - \cos(1+n\pi)\, y\right]$$

y sustituyendo en la intgegral

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(n\pi y)\, dy &= \int_0^1 \frac{1}{2}\left[\cos(1-n\pi) y - \cos(1+n\pi) y\right] dy \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-n\pi}\operatorname{sen}(1-n\pi) y - \frac{1}{1+n\pi}\operatorname{sen}(1+n\pi) y\Big|_{y=0}^{y=1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-n\pi}\operatorname{sen}(1-n\pi) - \frac{1}{1+n\pi}\operatorname{sen}(1+n\pi)\right)
\end{aligned}$$

La solución para el problema general sería

$$u(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi y)\, e^{\left(2-n^2\pi^2\right)t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-n\pi}\operatorname{sen}(1-n\pi) - \frac{1}{1+n\pi}\operatorname{sen}(1+n\pi)\right)\right)\operatorname{sen}(n\pi y)\, e^{(}$$

4. **(20 puntos)** Resuelve el siguiente problema

$$\begin{array}{cc}
\text{Minimizar} & x^2+y^2+z^2 \\
\text{Sujeto a} & \\
 & x+y+z \le -1.
\end{array}$$

Solución: El problema tiene una restricción de desigualdad, por tanto asignamos un único multiplicador tipo μ. Puesto que $\nabla h(x,y,z) = (1,1,1)$ no es el vector nulo, todos los puntos del problema son regulares y por tanto los puntos solución del problema deben encontrarse resolviendo el sistema de ecuaciones que nos proporcionan las condiciones de KKT:

$$\left.\begin{array}{r}
2x+\mu=0 \\
2y+\mu=0 \\
2z+\mu=0
\end{array}\right\} \quad \text{Condición Estacionaria } (\nabla f + \mu \nabla g = 0)$$

$$\mu(x+y+z+1) = 0 \qquad \text{Condición de holgura}$$

A estas ecuaciones hay que añadir las condiciones de factibilidad y signo correspondientes:

$$x+y+z \le -1$$

$$\mu \ge 0 \text{ (Ya que buscamos un mínimo)}$$

Utilizamos la condición de holgura, que nos proporciona dos casos

$$\left\{\begin{array}{ll}
\mu = 0 & \text{CASO I} \\
x+y+z+1=0 & \text{CASO II}
\end{array}\right.$$

(a) A continuación se resuelve cada uno de los sistemas que proporcionan los casos anteriores:

i. CASO I: $\mu = 0$. Este caso nos proporciona el punto $P_0 = (0,0,0)$ que no es factible puesto que al sustituir en la restricción correspondiente

$$0+0+0 = 0 \nleq -1$$

ii. CASO II: $x+y+z=-1$

$$\left.\begin{array}{r}
2x+\mu=0 \\
2y+\mu=0 \\
2z+\mu=0 \\
x+y+z=-1
\end{array}\right\}$$

sistema lineal cuya única solución es

$$
\begin{aligned}
x &= y = z = -\frac{1}{3} \\
\mu &= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Tenemos dos puntos y el siguiente cuadro:

Punto	μ	$f(x)$	Factibilidad	Extremo
$P_1 = (0,0,0)$	$\mu_{P_1} = 0$	$\dfrac{\sqrt{5}-5}{2\sqrt{5}}$	NO	–
				–
$P_2 = \left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$	$\mu_{P_2} = \frac{2}{3} > 0$	$\frac{1}{3}$	SI	Mínimo

Vamos a comprobar que P_2 cumple las condiciones de segundo orden. Para ello necesitamos los Hessianos de las funciones implicadas

$$
HL = Hf + \mu Hg = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

Para P_1 tendremos

$$
HL(P_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

que es definida positiva en todo el espacio real y por tanto en particular en el espacio tangente asociado a P_1,luego se cumplen las condiciones necesarias de segundo orden para que sea mínimo.