Ampliación de Matemáticas II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales
Convocatoria 29 Junio 2015

1. (2 puntos) Resolver utilizando la transformada de Laplace la ED

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 2 + (t-3)\, u_3(t), \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Determinar $y(1)$ e $y(4)$.

Solución: Denotamos por

$$Y(z) = \mathcal{L}[y](z),$$
$$x(t) = 2 + (t-3)\, u_3(t).$$

Utilizando las propiedades de linealidad y derivación de la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + 2y' + y](z) &= \mathcal{L}[x(t)](z) \\ \mathcal{L}[y''](z) + 2\mathcal{L}[y'](z) + \mathcal{L}[y](z) &= \mathcal{L}[x(t)](z) \end{aligned}$$

$$\left(z^2 Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) + 2\left(zY(z) - y(0)\right) + Y(z) = \mathcal{L}[x(t)](z)$$

es decir

$$\left(z^2 Y(z) - 2z - 1\right) + 2\left(zY(z) - 2\right) + Y(z) = \mathcal{L}[x(t)](z).$$

Despejando $Y(z)$

$$\left(z^2 + 2z + 1\right) Y(z) - 2z - 1 - 4 = \mathcal{L}[x(t)](z) \Rightarrow Y(z) = \frac{\mathcal{L}[x(t)](z) + 2z + 5}{z^2 + 2z + 1}.$$

Calcularemos ahora la transformada de Laplace de $x(t)$; por linealidad tenemos:

$$\mathcal{L}[x(t)](z) = \mathcal{L}[2 + (t-3)\, h_3(t)](z) = 2\mathcal{L}[1](z) + \mathcal{L}[(t-3)\, u_3(t)](z)$$

El primer término es la transformada de Laplace de la función uno (en realidad es $u_0(t)$)

$$\mathcal{L}[1](z) = \frac{1}{z},$$

mientras que el segundo se obtiene fácilmente utilizando el 2^o teorema de traslación

$$\mathcal{L}[f(t-a)\, h_a(t)](z) = e^{-az}\mathcal{L}[f(t)](z),$$

donde $a = 3$ y $f(t) = t$,

$$\mathcal{L}[(t-3)\, h_3(t)](z) = e^{-3z}\mathcal{L}[t](z) = \frac{e^{-3z}}{z^2}$$

por tanto

$$\mathcal{L}[x(t)](z) = 2 \cdot \mathcal{L}[1](z) + \mathcal{L}[(t-3)\, u_3(t)](z) = \frac{2}{z} + \frac{e^{-3z}}{z^2}.$$

Si se desconocen las propiedades y el teorema de traslación, siempre se puede utilizar la integración directa; aquí sólo se indica la forma de hacerlo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(t)](z) &= \int_0^\infty (2 + (t-3)\, u_3(t))\, e^{-zt} dt = \int_0^\infty 2e^{-zt} dt + \int_0^\infty (t-3)\, u_3(t)\, e^{-zt} dt \\ &= 2\int_0^\infty e^{-zt} dt + \int_3^\infty (t-3)\, e^{-zt} dt, \end{aligned}$$

la primera integral es directa y la segunda, si se quiere, por partes.

Sustituyendo en $Y(z)$ y teniendo en cuenta que $z^2+2z+1=(z+1)^2$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{\mathcal{L}[x(t)+](z)+2z+5}{z^2+2z+1} \\ &= \frac{\mathcal{L}[f(t)](z)}{(z+1)^2}+\frac{2z+5}{(z+1)^2} \\ &= \frac{\frac{2}{z}+\frac{e^{-3z}}{z^2}}{(z+1)^2}+\frac{2z+5}{(z+1)^2} \\ &= \frac{2z+e^{-3z}}{z^2(z+1)^2}+\frac{2z+5}{(z+1)^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{2z+5}{(z+1)^2}+\frac{2}{z(z+1)^2}+e^{-3z}\frac{1}{z^2(z+1)^2} \\ &= \frac{2z^2+5z+2}{z(z+1)^2}+e^{-3z}\frac{1}{z^2(z+1)^2} \end{aligned}$$

y así utilizando linealiad y el segundo teorema de traslación:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2z^2+5z+2}{z(z+1)^2}\right](t)+\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-3z}\frac{1}{z^2(z+1)^2}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2z^2+5z+2}{z(z+1)^2}\right](t)+u_3(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t-3) \\ &= y_1(t)+u_3(t)\,y_2(t-3), \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2z^2+5z+2}{z(z+1)^2}\right](t) \\ y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t) \end{aligned}$$

Calculamos la inversa por residuos. En la primera fracción están $z_1=0$ como polo simple y $z_2=-1$ como polo doble; mientras que en la segunda tanto z_1 como z_2 son dobles, por la fórmula de Bromwich tenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2z^2+5z+2}{z(z+1)^2}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(z)](t)=\operatorname{Res}\left(e^{zt}F_1(z),0\right)+\operatorname{Res}\left(e^{zt}F_1(z),-1\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z+1)^2}\right](t)=\mathcal{L}^{-1}[F_2(z)](t)=\operatorname{Res}\left(e^{zt}F_2(z),0\right)+\operatorname{Res}\left(e^{zt}F_2(z),-1\right)$$

Los residuos se calculan mediante la fórmula general para polos de orden k

$$z_1=0 \text{ polo simple de } F_1(z) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{Res}\left(e^{zt}F_1(z),0\right)=\lim_{z\to 0} z\cdot e^{zt}F_1(z) \\ &\quad =\lim_{z\to 0} e^{zt}\frac{2z^2+5z+2}{(z+1)^2} \\ &\quad =2 \end{aligned}\right.$$

$$z_2=-1 \text{ polo doble de } F_1(z) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{Res}\left(e^{zt}F_1(z),-1\right)=\lim\limits_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\cdot e^{zt}F_1(z)\right] \\ =\lim\limits_{z\to-1}\frac{d}{dz}e^{zt}\dfrac{2z^2+5z+2}{z} \\ =\lim\limits_{z\to-1}te^{zt}\dfrac{2z^2+5z+2}{z}+e^{zt}\dfrac{(4z+5)(z)-\left(2z^2+5z+2\right)}{z^2} \\ =te^{-t}\cdot 1+e^{-t}\cdot 0 \\ =te^{-t} \end{array} \right.$$

por tanto

$$y_1(t)=2+te^{-t}.$$

Mientras que para la segunda

$$z_1=0 \text{ polo doble de } F_2(z) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{Res}\left(e^{zt}F_2(z),0\right)=\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}z^2e^{zt}F_2(z) \\ =\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}e^{zt}\frac{1}{(z+1)^2} \\ =\lim_{z\to0}te^{zt}\frac{1}{(z+1)^2}+e^{zt}\frac{-2(z+1)}{(z+1)^4} \\ =t-2 \end{array} \right.$$

$$z_2=-1 \text{ polo doble de } F_2(z) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{Res}\left(e^{zt}F_2(z),-1\right)=\lim\limits_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\cdot e^{zt}F_2(z)\right] \\ =\lim\limits_{z\to-1}\frac{d}{dz}e^{zt}\frac{1}{z^2} \\ =\lim\limits_{z\to-1}te^{zt}\frac{1}{z^2}+e^{zt}\frac{-2z}{z^4} \\ =te^{-t}+2e^{-t} \end{array} \right.$$

y por tanto

$$y_2(t)=(t-2)+(t+2)e^{-t}$$

La solución será

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t)+u_3(t)\,y_2(t-3) \\ &= \left(2+te^{-t}\right)+u_3(t)\left((t-5)+(t-1)e^{-t}\right) \end{aligned}$$

También podríamos calcular la inversa realizando la descomposición en fracciones simples y luego empleando la tabla de transformadas:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2z^2+5z+2}{z(z+1)^2}\right](t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{z}+\frac{B}{(z+1)}+\frac{C}{(z+1)^2}\right](t)= \\ &= A\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t)+B\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)}\right](t)+C\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right](t) \\ &= A+Be^{-t}+Cte^{-t} \end{aligned}$$

Donde

$$\frac{A}{z}+\frac{B}{(z+1)}+\frac{C}{(z+1)^2}=\frac{2z^2+5z+2}{z(z+1)^2}\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=2 \\ B=0 \\ C=1 \end{array} \right.$$

y como antes

$$y_1(t)=2+te^{-t}.$$

Mientras que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{D}{z}+\frac{E}{z^2}+\frac{F}{(z+1)}+\frac{G}{(z+1)^2}\right](t)= \\ &= D\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t)+E\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t)+F\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)}\right](t)+G\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right](t) \\ &= D+Et+Fe^{-t}+Gte^{-t}. \end{aligned}$$

Donde

$$\frac{D}{z}+\frac{E}{z^2}+\frac{F}{(z+1)}+\frac{G}{(z+1)^2}=\frac{1}{z^2(z^2+1)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} D=-2 \\ E=1 \\ F=2 \\ G=1 \end{array}\right.$$

y como antes

$$y_2(t)=-2+t+2e^{-t}+te^{-t}=(t-2)+(t+2)e^{-t}.$$

2. Consideremos la función $f(t)=t^2$. Se pide:

   a) (1 punto) Determinar la serie de Fourier de la extensión periódica de $f(t)$ en el intervalo $[-\pi,\pi[$.

   b) (1 punto) Usar el desarrollo obtenido para verificar que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Solución:

a) La función $f(t)=t^2$ es par, puesto que

$$f(-t)=(-t)^2=(-1)^2t^2=t^2=f(t),$$

de donde obtenemos que $b_n=0$ en su desarrollo en series de Fourier. Para el cálculo de a_n utilizamos las fórmulas correspondientes, en este caso el periodo $T=2\pi$, por tanto el valor de $L=\pi$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^2dt=\frac{2}{\pi}\frac{t^3}{3}\Big|_{t=0}^{t=\pi}=\frac{2\pi^3}{\pi 3}=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^2\cos(nt)\,dt=\left(\begin{array}{c} u=t^2\Rightarrow du=2tdt \\ dv=\cos(nt)\,dt\Rightarrow v=\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nt)\end{array}\right)=\frac{2t^2}{\pi n}\operatorname{sen}(nt)\Big|_{t=0}^{t=\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2t\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nt)\,dt \\
&= -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}t\operatorname{sen}(nt)\,dt=\left(\begin{array}{c} u=t\Rightarrow du=dt \\ dv=\operatorname{sen}(nt)\,dt\Rightarrow v=-\frac{1}{n}\cos(nt)\end{array}\right)=\frac{4}{\pi n^2}t\cos(nt)\Big|_{t=0}^{t=\pi}+\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{4}{n^2}\cos(n\pi)+\frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}(nt)\Big|_{t=0}^{t=\pi} \\
&= \frac{4}{n^2}(-1)^n,
\end{aligned}$$

y la serie de Fourier buscada será

$$S_f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt)+b_n\operatorname{sen}(nt)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nt).$$

b) Teniendo en cuenta que la serie de Fourier coincide con la función en los puntos de continuidad tendremos

$$S_f(\pi)=f(\pi)$$

$$\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi)=\pi^2$$

y teniendo en cuenta de nuevo que $\cos(n\pi)=(-1)^n$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n &= \pi^2 \\
\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} &= \pi^2
\end{aligned}$$

Es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}=\pi^2-\frac{\pi^2}{3}=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{2\pi^2}{3}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

3. (2 puntos) Resolver

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0,2) \\ u(0,x) = f(x) & 0 < x < 2 \\ u_t(0,x) = 0 & 0 < x < 2 \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,2) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ 2-x & x \in [1,2]. \end{cases}$$

Es la EDP que describe la ecuación de onda, así que utilizamos el método de separación de variables, suponiendo que la solución $u(t,x)$ puede ponerse como producto de funciones en las variables independientes:

$$u(t,x) = F(t)\,G(x)$$

por tanto

$$\begin{aligned} u_{tt} &= F''(t)\,G(x) \\ u_x &= F(t)\,G'(x) \\ u_{xx} &= F(t)\,G''(x) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \Leftrightarrow F''(t)\,G(x) = c^2 F(t)\,G''(x)$$

Con estas suposiciones las condiciones de contorno son

$$\begin{aligned} u(t,0) &= F(t)\,G(0) = 0, \\ u(t,2) &= F(t)\,G(2) = 0, \end{aligned}$$

que con t es arbitraria implica

$$G(0) = G(2) = 0.$$

Mientras que la condición inicial

$$u_t(0,x) = F'(0)\,G(x) = 0,$$

implica que

$$F'(0) = 0.$$

Descartamos la solución trivial $u \equiv 0$ y supondremos que $F(t) \neq 0$ y $G(x) \neq 0$, por tanto

$$\frac{1}{c^2}\frac{F''(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)}$$

De nuevo cada miembro de la ecuación depende de una y sólo una de las variables independientes, así que ambos deben ser constantes:

$$\frac{1}{c^2}\frac{F''(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)} = -\lambda \tag{1}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, y el signo se toma por convención.
De 1 obtenemos dos ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned} F''(t) + \lambda c^2 F(t) = 0 \\ G''(x) + \lambda G(x) = 0 \end{aligned}\right\}.$$

y junto con las condiciones de contorno obtenemos el problema

$$\begin{cases} G''(x) + \lambda G(x) = 0 \\ G(0) = 0 \\ G(2) = 0 \end{cases}$$

cuya solución dependerá del valor del parámetro de separación λ. Distinguimos tres casos:

a) Caso $\lambda = 0$. En este caso la ecuación diferencial sería

$$G''(x) + \lambda G(x) = 0 \Rightarrow G''(x) = 0$$

cuya solución general se obtiene integrando dos veces respecto a x

$$G(x) = Ax + B$$

Si utilizamos las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \Rightarrow B = 0 \\ G(2) &= 0 \Rightarrow A \cdot 2 + B = 0 \end{aligned}$$

la solución del sistema anterior es: $A = B = 0$, y obtenemos la solución nula, que hemos dicho que no nos interesa.

b) Caso $\lambda < 0$. Supongamos ahora que λ es negativo, y por tanto lo podemos poner de la forma $\lambda = -\mu^2$, con $\mu = \sqrt{|\lambda|}$. La ecuación diferencial sería

$$G''(x) + \lambda G(x) = 0 \Rightarrow G''(x) - \mu^2 G(x) = 0$$

que tiene por solución general

$$G(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Utilizamos las condiciones de contorno para encontrar los valores de A y B

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \Rightarrow A + B = 0 \\ G(L) &= 0 \Rightarrow Ae^{\mu 2} + Be^{-\mu 2} = 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema lineal homogéneo en las incógnitas A y B. El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu 2} & e^{-\mu 2} \end{vmatrix} = e^{-\mu 2} - e^{\mu 2} = -2\,\mathrm{senh}(\mu 2)$$

y puesto que $\mu \neq 0$ es no nulo, la única solución del sistema es la trivial $A = B = 0$, que nos da para el problema de contorno de nuevo la solución nula.

c) Caso $\lambda > 0$. Supongamos ahora que λ es positivo, y por tanto lo podemos poner de la forma $\lambda = \mu^2$, con $\mu = \sqrt{\lambda}$. La ecuación diferencial sería

$$G''(x) + \lambda G(x) = 0 \Rightarrow G''(x) + \mu^2 G(x) = 0$$

que tiene por solución general

$$G(x) = A\cos\mu x + B\,\mathrm{sen}\,\mu x$$

Utilizamos las condiciones de contorno para encontrar los valores de A y B

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \Rightarrow A = 0 \\ G(2) &= 0 \Rightarrow A\cos\mu 2 + B\,\mathrm{sen}\,\mu 2 = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$B\,\mathrm{sen}\,\mu 2 = 0$$

Como no queremos la solución nula debe ocurrir $B \neq 0$ y

$$\mathrm{sen}\,\mu 2 = 0 \Leftrightarrow \mu 2 = n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

luego

$$\mu = \frac{n\pi}{2}$$

y el valor de $\lambda = \mu^2$ es

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{4}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

recordemos que λ era una constante arbitraria, luego para cada valor de $n \in \mathbb{N}$, tendremos una posible solución de la EDO,

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4} \Rightarrow G_n(x) = B_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

Notar que para $n = 0$ se obtendría de nuevo la nula, luego supondremos $n \geq 1$.

Para estos valores de λ_n la otra ecuación diferencial también es de segundo orden

$$F''(t) + c^2\lambda_n F(t) = 0 \Rightarrow F''(t) + c^2\frac{n^2\pi^2}{4}F(t) = 0$$

y cuya solución general para cada $n \in \mathbb{N}$ es de la forma

$$F_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{2}t\right) + D_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{2}t\right) \qquad \text{con } C_n, D_n \in \mathbb{R},$$

y como $F'(0) = 0$

$$F_n'(t) = -C_n\frac{n\pi c}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{2}t\right) + D_n\frac{n\pi c}{2}\cos\left(\frac{n\pi c}{2}t\right) \Rightarrow F_n'(0) = D_n\frac{n\pi c}{2} = 0,$$

lo que implica

$$D_n = 0,$$

y la función $F_n(t)$ es

$$F_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{2}t\right).$$

Finalmente una posible solución para la EDP será de la forma

$$u_n(t,x) = F_n(t)\,G_n(x) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{2}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

con $a_n = C_n B_n$. Como la ecuación es lineal, cualquier combinación lineal de soluciones es solución, y consideraremos como solución general formal a

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{2}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

Si ahora se utilizan la condición inicial $u(0,x) = f(x)$, se obtiene

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = f(x).$$

Podemos calcular el valor del coeficiente a_n, si observamos la expresión como el desarrollo de Fourier, concretamente la extensión impar de $f(x)$, por tanto:

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \int_0^2 f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx,$$

y utilizando la definición de $f(x)$

$$a_n = \int_0^1 x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 (2-x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx.$$

Hacemos cada integral por partes

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx &= \left(\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx \Rightarrow v = -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\end{array}\right) = -\frac{2x}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dt \\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (2-x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx &= \left(\begin{array}{c} u = 2-x \Rightarrow du = -dx \\ dv = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx \Rightarrow v = -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\end{array}\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}(2-x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_{x=1}^{x=2} - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dt \\
&= \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_{x=1}^{x=2} \\
&= \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ &= \frac{8}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

La solución es

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{2}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right).$$

4. (2 puntos) Resuelve el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(\mathbf{x})=f(x,y,z)=x+y+z \\ \text{sujeto a} & (x-1)^2+y^2\le 2 \\ & (x-1)^2+y^2+4z^2\le 6 \end{array}$$

Un análisis inicial permitirá deducir que el problema tiene solución para ambos objetivos, minimizar y maximizar, ya que la función objetivo es continua y el conjunto factible Ω es compacto (cerrado, porque contiene a la frontera que está expresada mediante igualdades y acotado, porque es un subconjunto de un elipsoide de centro $(1,0,0)$ y semiejes $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{6}/2$), así por el teorema Weierstrass existirán tanto el mínimo como el máximo de la función sobre el conjunto.
NOTA: La ecuación del elipsoide se obtiene dividiendo por 6

$$(x-1)^2+y^2+4z^2\le 6\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{6}+\frac{y^2}{6}+\frac{4z^2}{6}\le 1\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{6}+\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{6/4}\le 1$$

Reescribimos el problema para poner

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(x,y,z)=x+y+z \\ \text{sujeto a} & (x-1)^2+y^2-2\le 0 \\ & (x-1)^2+y^2+4z^2-6\le 0 \end{array}\right\}$$

con $g_1(x,y,z)=(x-1)^2+y^2-2$ y $g_2(x,y,z)=(x-1)^2+y^2+4z^2-6$. Se construye la función Lagrangiana

$$L(x,y,z)=(x+y+z)+\mu_1\left((x-1)^2+y^2-2\right)+\mu_2\left((x-1)^2+y^2+4z^2-6\right)$$

y se plantean cada una de las condiciones del teorema:

1. *Condición Estacionaria:*

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0\Leftrightarrow 1+2\mu_1(x-1)+2\mu_2(x-1)=0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0\Leftrightarrow 1+2\mu_1 y+2\mu_2 y=0 \qquad [2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0\Leftrightarrow 1+8\mu_2 z=0 \qquad [3]$$

2. *Condición de factibilidad*:

$$\begin{aligned} (x-1)^2+y^2-2 &\le 0\\ (x-1)^2+y^2+4z^2-6 &\le 0 \end{aligned}$$

3. *Condición de holgura:*

$$\mu_1 g_1(x) = 0\Leftrightarrow\mu_1\left((x-1)^2+y^2-2\right)=0 \qquad [4]$$

$$\mu_2 g_2(x) = 0\Leftrightarrow\mu_2\left((x-1)^2+y^2+4z^2-6\right)=0 \qquad [5]$$

4. *Condición de signo:*

$$\begin{aligned} \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \Rightarrow \text{ Para mínimo} \\ \mu_1, \mu_2 &\leq 0 \Rightarrow \text{ Para máximo} \end{aligned}$$

Hay que resolver el sistema formado por las ecuaciones [1], [2], [3], [4] y [5]:

$$\begin{aligned} 1 + 2\mu_1 (x-1) + 2\mu_2 (x-1) &= 0 \\ 1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y &= 0 \\ 1 + 8\mu_2 z &= 0 \\ \mu_1 \left((x-1)^2 + y^2 - 2 \right) &= 0 \\ \mu_2 \left((x-1)^2 + y^2 + 4z^2 - 6 \right) &= 0 \end{aligned}$$

A partir de [4] y [5] se obtienen cuatro posibles casos:

$$\begin{cases} \mu_1 = 0 & \Longrightarrow \begin{cases} \mu_2 = 0 & \textbf{Caso I} \\ (x-1)^2 + y^2 + 4z^2 - 6 = 0 & \textbf{Caso II} \end{cases} \\ (x-1)^2 + y^2 - 2 = 0 & \Longrightarrow \begin{cases} \mu_2 = 0 & \textbf{Caso III} \\ (x-1)^2 + y^2 + 4z^2 - 6 = 0 & \textbf{Caso IV} \end{cases} \end{cases}$$

De [3] se deduce que $\mu_2 \neq 0$, así que se descartan los casos **I** y **III**. Estudiamos los casos **II** y **IV** por separado.

1. **Caso II** $\left(\mu_1 = 0,\ (x-1)^2 + y^2 + 4z^2 - 6 = 0\right)$**:** Sustituyendo $\mu_1 = 0$ en las ecuaciones del sistema obtenemos:

$$1 + 2\mu_2 (x-1) = 0 \qquad [6]$$

$$1 + 2\mu_2 y = 0 \qquad [7]$$

$$1 + 8\mu_2 z = 0 \qquad [8]$$

$$(x-1)^2 + y^2 + 4z^2 - 6 = 0 \qquad [9]$$

Si restamos [6] y [7]

$$1 + 2\mu_2 (x-1) - (1 + 2\mu_2 y) = 0 \Leftrightarrow 2\mu_2 (x - 1 - y) = 0,$$

y como $\mu_2 \neq 0$ se obtiene

$$x - 1 - y = 0 \Rightarrow x - 1 = y,$$

Restando ecuaciones [7] y [8]

$$(1 + 2\mu_2 y) - (1 + 8\mu_2 z) = 0 \Leftrightarrow 2\mu_2 (y - 4z) = 0,$$

y como $\mu_2 \neq 0$, entonces

$$(y - 4z) = 0 \Rightarrow y = 4z.$$

Para $y = x - 1 = 4z$, usamos [9]

$$(x-1)^2 + y^2 + 4z^2 - 6 = 0 \Rightarrow y^2 + y^2 + 4\frac{y^2}{16} - 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{8}{3}},$$

mientras que para las otras dos variables

$$y = \sqrt{\frac{8}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 = 1 + \sqrt{\frac{8}{3}} \\ z = \frac{y}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{1}{6}} \end{cases},$$

$$y = -\sqrt{\frac{8}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 = 1 - \sqrt{\frac{8}{3}} \\ z = \frac{y}{4} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{3}} = -\sqrt{\frac{1}{6}} \end{cases}.$$

Como $z \neq 0$, despejamos μ_2 de la ecuación [8]

$$\mu_2 = -\frac{1}{8z} = \mp\frac{1}{8\sqrt{\frac{1}{6}}} = \mp\frac{\sqrt{6}}{8}.$$

Se han obtenido 2 puntos, con sus respectivos multiplicadores:

$$P_1 = \left(1 + \sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{1}{6}}\right), \qquad \mu = \left(0, -\frac{\sqrt{6}}{8}\right),$$

$$P_2 = \left(1 - \sqrt{\frac{8}{3}}, -\sqrt{\frac{8}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{6}}\right), \qquad \mu = \left(0, \frac{\sqrt{6}}{8}\right).$$

2. **Caso IV** $\left((x-1)^2 + y^2 - 2 = 0,\ (x-1)^2 + y^2 + 4z^2 - 6 = 0\right)$**:** El sistema en este caso queda como:

$$1 + 2\mu_1(x-1) + 2\mu_2(x-1) = 0 \qquad [10]$$

$$1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y = 0 \qquad [11]$$

$$1 + 8\mu_2 z = 0 \qquad [12]$$

$$(x-1)^2 + y^2 - 2 = 0 \qquad [13]$$

$$(x-1)^2 + y^2 + 4z^2 - 6 = 0 \qquad [14]$$

Restando [13] y [14]

$$\left((x-1)^2 + y^2 - 2\right) - \left((x-1)^2 + y^2 + 4z^2 - 6\right) = 0 \Rightarrow 4z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1$$

Y se sustituye estos valores en [12] para calcular μ_2

$$\mu_2 = -\frac{1}{8z} = -\frac{1}{8(\pm 1)} = \mp\frac{1}{8}.$$

Si ahora se restan [10] y [11]

$$(1 + 2\mu_1(x-1) + 2\mu_2(x-1)) - (1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y) = 0.$$

Operando

$$2\mu_1(x-1-y) + 2\mu_2(x-1-y) = 0 \Leftrightarrow 2(\mu_1 + \mu_2)(x-1-y) = 0,$$

con dos posibles dos opciones, o bien

$$\mu_1 + \mu_2 = 0$$

pero entonces por [11]

$$1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y = 0 \Leftrightarrow 1 + 2y(\mu_1 + \mu_2) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$$

que obviamente es imposible. O bien

$$x - 1 - y = 0 \Leftrightarrow x - 1 = y.$$

Utilizando [13] se obtiene el valor de y

$$(x-1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1,$$

mientras que para x

$$x = y + 1 = \pm 1 + 1.$$

Queda por determinar el valor del multiplicador μ_1 para cada uno de los puntos y para ello utilizamos la ecuación [11]

$$1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y = 0 \Rightarrow \mu_1 = -\mu_2 - \frac{1}{2y}$$

Teniendo en cuenta los distintos valores que se han encontrado para μ_2 (2 valores) y para y (otros 2 valores) tendremos 4 casos posibles

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \frac{1}{8} \qquad y = 1 \Rightarrow \mu_1 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{8} \\
\mu_2 &= \frac{1}{8} \qquad y = -1 \Rightarrow \mu_1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\
\mu_2 &= -\frac{1}{8} \qquad y = 1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} \\
\mu_2 &= -\frac{1}{8} \qquad y = -1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

Finalmente se han obtenido cuatro puntos:

$$\begin{aligned}
P_3 &= (2, 1, -1) \qquad \mu = \left(-\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right) \\
P_4 &= (0, -1, -1) \qquad \mu = \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) \\
P_5 &= (2, 1, 1) \qquad \mu = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\right) \\
P_6 &= (0, -1, 1) \qquad \mu = \left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\right)
\end{aligned}$$

Se expone a continuación una tabla resumen con los resultados obtenidos en la resolución del sistema, donde se ha incluido la factibilidad de los puntos y el signo de sus correspondientes multiplicadores:,

$\mathbf{P} = (x, y, z)$	$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$	Factibilidad	Signo $\boldsymbol{\mu}$	Carácter
$P_1 = \left(1 + \sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{1}{6}}\right)$	$\mu = \left(0, -\frac{\sqrt{6}}{8}\right)$	NO	-	-
$P_2 = \left(1 - \sqrt{\frac{8}{3}}, -\sqrt{\frac{8}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$	$\mu = \left(0, \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$	NO	-	-
$P_3 = (2, 1, -1)$	$\mu = \left(-\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right)$	SI	NO	
$P_4 = (0, -1, -1)$	$\mu = \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)$	SI	Positividad	Mínimo
$P_5 = (2, 1, 1)$	$\mu = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\right)$	SI	Negatividad	Máximo
$P_6 = (0, -1, 1)$	$\mu = \left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\right)$	SI	NO	

Los puntos P_1 y P_2 no son factibles ya que no cumplen la primera restricción del problema

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left(1 + \sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{1}{6}}\right) \Rightarrow g_1(P_1) = (x-1)^2 + y^2 = \left(1 + \sqrt{\frac{8}{3}} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} - 2 = \frac{10}{3} \nleq 0, \\
P_2 &= \left(1 - \sqrt{\frac{8}{3}}, -\sqrt{\frac{8}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{6}}\right) \Rightarrow g_1(P_2) = (x-1)^2 + y^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{8}{3}} - 1\right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} - 2 = \frac{10}{3} \nleq 0,
\end{aligned}$$

así que se descartan.

Los puntos P_3 y P_6 son factibles pero no tiene multiplicadores de Karush-Kuhn-Tucker de signo constante, por tanto tampoco cumplen las condiciones del teorema.

Los puntos P_4 y P_5 son factibles y sus multipllicadores de Karush-Kuhn-Tucker tienen signo constante, en el caso de P_5 sería un punto de posible máximo ya que $\mu \leq 0$, mientras que P_4 sería un punto de posible mínimo puesto que $\mu \geq 0$.

Vamos a comprobar si se cumple la condición del Hessiano en los puntos P_4 y P_5. Para ello tenemos que construir la matriz $HL(P_k)$ en cada punto y considerarla sobre el espacio tangente correspondiente $M(P_k)$. Comenzamos por definir la matriz HL en cada punto:

$$HL(\mathbf{x}) = Hf(\mathbf{x}) + \mu_1 Hg_1(\mathbf{x}) + \mu_2 Hg_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2(\mu_1 + \mu_2) & 0 & 0 \\ 0 & 2(\mu_1 + \mu_2) & 0 \\ 0 & 0 & 8\mu_2 \end{pmatrix}$$

Para P_4 :

$$HL\left(P_4\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y su espacio tangente, teniendo en cuenta que están activas las dos restricciones $\left(g_1\left(P_4\right) = 0, g_2\left(P_4\right) = 0\right)$, estará definido por

$$\begin{aligned} \nabla g_1\left(P_4\right) &= \begin{pmatrix} 2\left(x-1\right) \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)=P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nabla g_2\left(P_4\right) &= \begin{pmatrix} 2\left(x-1\right) \\ 2y \\ 8z \end{pmatrix}_{(x,y,z)=P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M\left(P_4\right) &= \left\{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 \middle| \mathbf{d}^T \nabla g_1\left(P_4\right) = 0, \mathbf{d}^T \nabla g_2\left(P_4\right) = 0\right\} = \\ &= \left\{(d_1, d_2, d_3)\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0; (d_1, d_2, d_3)\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = 0\right\} \\ &= \left\{-2d_1 - 2d_2 = 0; -2d_1 - 2d_2 - 8d_3 = 0\right\} \\ &= \left\{d_3 = 0, d_1 + d_2 = 0\right\} \\ &= \left\{(d_1, -d_1, 0)\right\}. \end{aligned}$$

Al hacer actuar la matriz $HL\left(P_4\right)$ sobre los puntos de $M\left(P_4\right)$ tendremos

$$(d_1, -d_1, -0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ -d_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (d_1, -d_1, -0)\begin{pmatrix} d_1 \\ -d_1 \\ 0 \end{pmatrix} = d_1^2 + d_1^2 = 2d_1^2 \geq 0$$

luego $HL\left(P_4\right)$ es semidefinida positiva para los vectores de $M\left(P_4\right)$ y se cumple la condición de Hessiano. En este caso también es posible deducir el mismo resultado si observamos que $HL\left(P_4\right)$ es una matriz semidefinida positiva sobre todo $\mathbb{R}^3$, ya que es diagonal positiva y puesto que el espacio tangente $M\left(P_4\right) \subseteq \mathbb{R}^3$, la matriz $HL\left(P_4\right)$ también será semidefinida positiva sobre él. P_4 cumple las condiciones necesarias de segundo orden para ser un máximo.

Para el punto P_5 tendremos

$$HL\left(P_5\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y su espacio tangente, teniendo en cuenta que también están activas las dos restricciones $\left(g_1\left(P_5\right) = 0, g_2\left(P_5\right) = 0\right)$, será

$$\begin{aligned} \nabla g_1\left(P_5\right) &= \begin{pmatrix} 2\left(x-1\right) \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)=P_5} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nabla g_2\left(P_5\right) &= \begin{pmatrix} 2\left(x-1\right) \\ 2y \\ 8z \end{pmatrix}_{(x,y,z)=P_5} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M\left(P_5\right) &= \left\{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 \middle| \mathbf{d}^T \nabla g_1\left(P_5\right) = 0, \mathbf{d}^T \nabla g_2\left(P_5\right) = 0\right\} = \\ &= \left\{(d_1, d_2, d_3)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0; (d_1, d_2, d_3)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = 0\right\} \\ &= \left\{2d_1 + 2d_2 = 0; 2d_1 + 2d_2 + 8d_3 = 0\right\} \\ &= \left\{d_3 = 0, d_1 + d_2 = 0\right\} \\ &= \left\{(d_1, -d_1, 0)\right\}. \end{aligned}$$

De esta forma cuando hacemos actuar la matriz $HL(P_5)$ sobre los puntos de $M(P_5)$ tendremos

$$(d_1, -d_1, -0)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ -d_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (d_1, -d_1, -0)\begin{pmatrix} -d_1 \\ d_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -d_1^2 - d_1^2 = -2d_1^2 \leq 0,$$

luego $HL(P_5)$ es semidefinida negativa para los vectores de $M(P_5)$ y se cumple la condición de Hessiano. Como antes, también podemos deducir este resultado viendo que $HL(P_5)$ es una matriz semidefinida negativa sobre todo $\mathbb{R}^3$, ya que es diagonal negativa y puesto que el espacio tangente $M(P_5)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, la matriz $HL(P_5)$ también será semidefinida negativa sobre él. P_5 cumple las condiciones necesarias de segundo orden para ser un máximo.

Comprobaremos que no haya puntos irregulares, ya que en ese caso, podrían existir mínimos locales que no cumplieran las condiciones del teorema. Como hay dos restricciones de desigualdad, tendremos que estudiar qué ocurre con ∇g_1 y ∇g_2, cuando cada una de las restricciones es activa de forma individual y también de forma conjunta. Veamos qué puntos pueden ser irregulares,

$$(x_0, y_0, z_0) \text{ no es regular} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} g_1(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ y} \\ \{\nabla g_1(x_0, y_0, z_0)\} \text{ linealmente dependiente} \\ \text{o} \\ g_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ y} \\ \{\nabla g_2(x_0, y_0, z_0)\} \text{ linealmente dependiente} \\ \text{o} \\ g_1(x_0, y_0, z_0) = 0, \; g_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ y} \\ \{\nabla g_1(x_0, y_0, z_0), \nabla g_2(x_0, y_0, z_0)\} \text{ linealmente dependientes} \end{array} \right. .$$

Recordemos que un único vector es linealmente dependiente si y sólo si es el vector nulo.

1. Caso I: g_1 activa y ∇g_1 es el vector nulo.

$$\begin{aligned} g_1(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x_0 - 1)^2 + y_0^2 - 2 = 0 \\ \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (2(x_0 - 1), 2y_0, 0) = 0 \end{aligned}$$

   De la segunda ecuación se obtiene
$$(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, z_0)$$
   pero al sustituir en la primera
$$(1-1)^2 + 0^2 - 2 = -2 \neq 0$$
   luego este caso no puede darse.

2. Caso II: g_2 activa y ∇g_2 es el vector nulo.

$$\begin{aligned} g_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x_0 - 1)^2 + y_0^2 + 4z_0^2 - 6 = 0 \\ \nabla g_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (2(x_0 - 1), 2y_0, 8z_0) = 0 \end{aligned}$$

   De la segunda ecuación se obtiene
$$(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$$
   pero al sustituir en la primera
$$(1-1)^2 + 0^2 + 4 \cdot 0^2 - 6 = -6 \neq 0$$
   luego este caso tampoco puede darse.

3. Caso III: g_1 y g_2 son activas y $\{\nabla g_1, \nabla g_2\}$ son linealmente dependientes.

$$\begin{aligned} g_1(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x_0 - 1)^2 + y_0^2 - 2 = 0 \\ g_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x_0 - 1)^2 + y_0^2 + 4z_0^2 - 6 = 0 \\ \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) = \alpha \nabla g_2(x_0, y_0, z_0) \quad &\Rightarrow \quad (2(x_0 - 1), 2y_0, 0) = \lambda(2(x_0 - 1), 2y_0, 8z_0,) \end{aligned}$$

   De las dos primeras ecuaciones obtenemos
$$z_0^2 = \pm 1 \neq 0,$$
   pero de la última ecuación tenemos
$$z_0 = 0,$$
   lo que es imposible.

De esta forma todos los puntos factibles son regulares, y es imposible que exista un mínimo o máximo local que no cumpla las condiciones necesarias de primer y segundo orden. Los puntos P_4 y P_5 serán el máximo y mínimo del problema respectivamente.

Los valores óptimos mínimo y máximo de $f(x, y, z)$ sobre Ω se obtienen al evaluar la función objetivo en cada uno de ellos

$$\text{Valor Óptimo Máximo} \Rightarrow f(P_4) = (2) + (1) + (1) = 4,$$

y

$$\text{Valor Óptimo Mínimo} \Rightarrow f(P_5) = (0) + (-1) + (-1) = -2.$$
