1. Encuentre los desarrollos en serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas (se da su valor en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ siendo T su periodo).

(a) $f(t) = \begin{cases} -1 & t \in [-1, 0) \\ 1 & t \in [0, 1] \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} t & t \in [-2, 0) \\ 0 & t \in [0, 2] \end{cases}$

(c) $f(t) = t, \quad t \in [-1, 1]$

(d) $f(t) = \begin{cases} -t & t \in [-1, 0) \\ t & t \in [0, 1] \end{cases}$

(e) $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-2, 0) \\ 0 & t \in [0, 1) \\ 1 & t \in [1, 2] \end{cases}$

(f) $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-2, 1) \\ 1 & t \in [1, 2] \end{cases}$

(g) $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-L, 0) \\ e^t & t \in [0, L] \end{cases}$

(h) $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \in [-L, 0) \\ e^t & t \in [0, L] \end{cases}$

2. Dada la función $f(t) = |t|$.

   a) Determine la serie de Fourier de la extensión periódica de $f(t)$ en el intervalo $[-\pi, \pi[$.

   b) Utilice el apartado anterior para sumar la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

3. Dada la función $f(t) = t^2$.

   a) Determine la serie de Fourier de la extensión periódica de $f(t)$ en el intervalo $[0, 2\pi[$.

   b) Utilice el apartado anterior para comprobar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Dada la función
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-5, 0) \\ 3 & t \in [0, 5) \end{cases}.$$

   a) Determine los coeficientes de Fourier de la extensión periódica de $f(t)$ en el intervalo $[-5, 5[$.

   b) Escriba la serie de Fourier.

   c) ¿Cómo debería definirse $f(t)$ cuando $t = -5$, $t = 0$ y $t = 5$, para que la serie converja a $f(t)$ en $[-5, 5[$.

5. Encuentre la transformada de Fourier de las siguientes funciones

(a) $f(t) = \begin{cases} \cos t & |t| < \pi/2 \\ 0 & |t| \geq \pi/2 \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} a - |t| & |t| < a \\ 0 & |t| \geq a \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ -1 & -2 \leq t < -1 \\ 1 & -1 \leq t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$

(d) $f(t) = \mathsf{h}_0\left(t + \frac{1}{2}\right) - \mathsf{h}_0\left(t - \frac{1}{2}\right)$

(e) $f(t) = \left(h_0\left(t + \frac{1}{2}\right) - h_0\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) \operatorname{sen} 2t$

(f) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(at) & |t| \leq \pi/a \\ 0 & |t| > \pi/a \end{cases} \qquad a > 0$

(g) $\mathsf{f}(t) = \left(h_0\left(t + \tfrac{1}{2}\right) - h_0\left(t - \tfrac{1}{2}\right)\right) \cos(at); \quad a > 0$

(h) $f(t) = \begin{cases} 0 & \dfrac{a}{2} < |t| \\ 1 & \dfrac{a}{2} < |t| < \dfrac{b}{2} \\ 2 & |t| > \dfrac{b}{2} \end{cases}$

6. Considere la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases} \qquad a > 0$$

a) Determine su transformada de Fourier.

b) Utilice el apartado anterior para evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(a\omega)\cos(\omega t)}{\omega} d\omega$$

c) Deduzca el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\omega)}{\omega} d\omega.$$

7. Considere la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

a) Determine su transformada de Fourier.

b) Utilice el apartado anterior para evaluar

$$\int_{0}^{\infty} \left(\frac{\omega \cos\omega - \operatorname{sen}\omega}{\omega^3}\right) \cos\frac{\omega}{2} d\omega$$

8. Calcula la convolución $(f * f)(t)$ en los siguientes casos:

a) $f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq a \\ 0 & |t| > a \end{cases} \qquad a > 0 \qquad$ b) $f(t) = e^{-|t|}$

9. (*) Calcula la transformada de Fourier inversa de la función

$$F(\omega) = \frac{e^{-\omega^2}}{\omega^2 + 1}$$

(*) Ejercicios con dificultad especial.