Curso 2016/2017
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales
Ampliación de Matemáticas - Problemas Tema 1
Transformada de Laplace

1. Calcula la transformada de Laplace de las siguientes funciones

   a) $f(t) = \operatorname{sen}(3t)$ *b*) $f(t) = e^{5t}$ *c*) $f(t) = e^{5t}\cos(3t)$ *d*) $f(t) = te^{t}$

   e) $f(t) = t^3 - t$ *f*) $f(t) = \sinh t$ *g*) $f(t) = \cos t \operatorname{sen} t$ *h*) $f(t) = e^{t}\cos t \operatorname{sen} 2t$

2. (*) Una función $f : [0, \infty[\to R$ se dice que es periódica con periodo $a > 0$, o a-periódica si para cada $t \geq 0$, se tiene que $f(t) = f(t+a)$. Comprueba que en caso de existir la transformada de Laplace de $f(t)$, se verifica la igualdad

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{1 - e^{-az}} \int_0^a e^{-zt} f(t)\, dt$$

   Usa el resultado anterior para calcular la transformada de Laplace de la función periódica de periodo 2 definida en $[0, 2]$ por

$$f(t) = \begin{cases} t & t \in [0,1] \\ 2 - t & t \in [1,2] \end{cases}$$

3. (*) Calcula la transformada de Laplace de la función escalonada

$$f(t) = \begin{cases} \pi & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

   extendida a todo $[0, \infty)$ como $2-$periódica.

4. (*) Sea la función $E(t)$ que a cada número $t \geq 0$, le asigna su parte entera, es decir, $E(t)$ es un número natural de forma que

$$E(t) \leq t < E(t) + 1$$

   Calcula la transformada de Laplace de $E(t)$.

5. Calcula la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 < t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

6. Dada la función
$$f\left(t\right)=\int_0^t e^{-s}\operatorname{sen}\left(s\right)ds \qquad t\geq 0$$
Calcula $\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]\left(z\right)$. Calcula $\mathcal{L}\left[g\left(t\right)\right]\left(z\right)$ siendo $g\left(t\right)=t\cdot f\left(t\right)$.

7. Calcula la transformada de Laplace de las siguientes funciones
$$a)\ f\left(t\right)=\left|\operatorname{sen}t\right| \qquad b)\ f\left(t\right)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & 0\leq t\leq 1 \\ t & t>1 \end{array}\right. \qquad b)\ f\left(t\right)=\left\{\begin{array}{ll} t^2-1 & 0\leq t\leq 2 \\ 2 & t>2 \end{array}\right.$$

8. Calcula la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:
$$a)\ F\left(z\right)=\frac{z^2}{1+z^3} \qquad b)\ F\left(z\right)=\frac{1}{\left(z-1\right)\left(z^2-2\right)}$$
$$c)\ F\left(z\right)=\frac{z+1}{z^4} \qquad d)\ G\left(z\right)=\frac{z^2}{\left(z-2\right)\left(z^3-1\right)}$$
$$e)\ F\left(z\right)=\frac{z+7}{z^2+2z+5} \qquad f)\ F\left(z\right)=\frac{1}{\left(z+1\right)\left(z+2\right)\left(z^2+2z+10\right)}$$
$$g)\ F\left(z\right)=\frac{z}{\left(z-1\right)\left(z+2\right)^2} \qquad h)\ F\left(z\right)=\frac{e^{-z}}{z}+\frac{z-1}{z^2+2}$$

9. Calcula la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:
$$a)\ F\left(z\right)=\frac{ze^{-\pi z}}{z^2+2z+5} \qquad b)\ F\left(z\right)=\frac{\left(z-1\right)e^{-z}}{z^3+2}$$
$$c)\ F\left(z\right)=\frac{z+1}{e^z z^2\left(z^2+9\right)} \qquad d)\ F\left(z\right)=\frac{e^{-az}}{1+z^2} \qquad a>0$$

10. Utiliza la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (problemas de valor inicial):

a) $$\left.\begin{array}{c} y'''\left(t\right)+5y''\left(t\right)+17y'\left(t\right)+13y\left(t\right)=1 \\ y\left(0\right)=y'\left(0\right)=1,\ y''\left(0\right)=0 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} y'\left(t\right)+3y\left(t\right)=e^{-2t} \\ y(0)=2 \end{array}\right\}$$

c) $$\left.\begin{array}{c} y''\left(t\right)+y'\left(t\right)-2y\left(t\right)=5h_4\left(t\right) \\ y\left(0\right)=1,\ y'\left(0\right)=0 \end{array}\right\}$$

d) $$\left.\begin{array}{c} y''(t)+y(t)=t \\ y\left(0\right)=1,\ y'\left(0\right)=-2 \end{array}\right\}$$

e) $$\left.\begin{array}{l} y''(t)+y'(t)=\phi(t),\ \text{con } \phi(t)=\left\{\begin{array}{ll} t, & t<1 \\ 0, & t\geq 1 \end{array}\right. \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2 \end{array}\right\}$$

f) $$\left.\begin{array}{l} y''(t)+y(t)=\operatorname{sen}t \\ y(0)=y'\left(0\right)=-1 \end{array}\right\}$$

11. Usa la transformada de Laplace para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\left.\begin{array}{r} 2y_1''(t) - y_2''(t) - y_1'(t) - y_2'(t) + 9y_1(t) - 3y_2(t) = 0 \\ \\ 2y_1''(t) - y_2''(t) + y_1'(t) + y_2'(t) + 7y_1(t) - 5y_2(t) = 0 \end{array}\right\}$$

con las condiciones iniciales $y_1(0) = y_1'(0) = 1$, $y_2(0) = y_2'(0) = 0$.

12. Obtén la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{array}{r} 3y_1'(t) + y_2'(t) - 2y_1(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t + 5\cos t \\ \\ 2y_1'(t) + y_2'(t) + y_2(t) = \mathrm{sen}\, t + \cos t \end{array}\right\}$$

para las condiciones iniciales $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = -1$.

13. Resuelve el problema $y''(t) + y'(t) = f(t)$ con valores iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, siendo $f(t)$ la función definida a trozos

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases}$$

14. Resuelve la ecuación diferencial $y''(t) + y(t) = f(t)$ con condiciones iniciales nulas $y(0) = y'(0) = 0$ y la función definida a trozos

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t < 2 \\ -1 & 2 \le t < 3 \\ 0 & t \ge 3 \end{cases}$$

15. Resuelve con transformada de Laplace la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = f(t)$, con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$ y

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \le t < 1 \\ \\ 0 & \text{para } t \ge 1. \end{cases}$$

16. Resuelve el problema $y'' + 2y' + 5y = f(t)$, con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ y la función

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{sen}\, t & t \in [0, \pi], \\ 0 & t > \pi. \end{cases}$$

17. Utiliza la transformada de Laplace para resolver la ecuación integro–diferencial

$$y'(t) + 2y(t) + 1 + 2\int_0^t y(x)dx = f(t)$$

con la condición inicial $y(0) = 2$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 2, \\ \\ 0 & t > 2. \end{cases}$$

18. Resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = f(t)$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1, \\ \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

(*) Ejercicios con dificultad especial.