1. Resuelve los siguientes problemas de condiciones iniciales mediante la Transformada de Laplace:

(a) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = -4(x+y) \\ x' + 4y' = -4y \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -3y - x \\ x(0) = 6, \quad y(0) = -2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' = x - z \\ y' = 2y \\ z' = x + z \\ x(0) = -2, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = -1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + z \\ z' = -x - y \\ x(0) = -1, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = -1 \end{cases}$

2. Resuelve los siguientes sistemas y problemas de condiciones iniciales:

(a) $\begin{cases} x' = y + te^{2t} \\ y' = -2x + 3y + e^{2t} \\ x(0) = 1, \quad y(0) = -1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = 4x + 3y + 5z + e^{t} \operatorname{sen} 2t \\ y' = -y - 4z \\ z' = 2y + 3z \end{cases}$

(c) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = -3x - y + z + t \\ z' = 9x + 3y - 4z \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 3, \quad z(0) = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = -2x - 5y + t \\ y' = x + 2y + t^2 \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \\ x(0) = -1, \quad y(0) = 0 \end{cases}$

3. Estudia mediante el método de los valores propios, la estabilidad de los siguientes sistemas lineales:

(a) $\begin{cases} x' = x - 5y + 5z \\ y' = -2x - 2y + 2z \\ z' = 3x - 3y + 3z \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = -5x + y - z \\ y' = -2x - 2y + 2z \\ z' = -3x + 3y - 3z \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = -x - 2z \\ y' = 3x - 2y \\ z' = 4x + z \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = -9x + y - 2z \\ y' = 3x - 9y \\ z' = 4x + y + z \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' = -5x + y - z \\ y' = -3x - y + 3z \\ z' = -4x + 4y + -2z \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x' = -2x - 2y + 2z \\ y' = -2x - 2y + 2z \\ z' = 0 \end{cases}$

4. Determina, si es posible, mediante el teorema de Routh-Hurwirtz la estabilidad asintótica de los siguientes sistemas:

(a) $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x \\ y' = \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - z \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = -3x - y + z \\ y' = x - 5y - z \\ z' = 2x - 2y - 4z \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = -\frac{5}{12}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z \\ y' = \frac{5}{12}x - \frac{13}{12}y - \frac{5}{12}z \\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{5}{6}z \end{cases}$

5. Repite el problema anterior utilizando el teorema de los círculos de Gershgorin.

6. Encuentra los puntos críticos de los siguientes sistemas y determinar si son o no hiperbólicos y determina, si es posible su naturaleza local:

(a) $\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = -y + y^2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + x^3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = x - y \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = y - e^x \\ y' = y + e^x \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x' = -x \\ y' = 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} x' = -x^2 + xy - x + y \\ y' = -x^2 + y^2 + x - 4y + 2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x' = y - xy^2 \\ y' = -x^3 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} x' = x^3 - x - y \\ y' = x \end{cases}$ (j) $\begin{cases} x' = x + x^2 + xy + y^2 \\ y' = x^2 + xy + y^2 \end{cases}$

7. Consideremos la ecuación de Van Der Pol

$$x'' + x - \varepsilon x' \left(1 - x^2\right) = 0$$

con $\varepsilon \in R$. Transforma la ecuación en un sistema plano y determinar los puntos críticos del mismo. Determinar la naturaleza de los puntos críticos en función del valor de ε.

8. Repite el problema anterior para la ecuación

$$x'' + 2\varepsilon x' + \left(1 - \varepsilon^2\right) x = 0$$

9. Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = x + (\varepsilon + 1)\, y \\ y' = 2\,(\varepsilon - 1)\, x + y \end{cases}$$

donde ε es un parámetro real. Discute la estabilidad de los puntos críticos del sistema en función del parámetro ε.

10. Supongamos un circuito eléctrico LRC en serie con $L = 0{,}02H$, $R = 300\Omega$ y $C = 4 \times 10^{-6}F$. Determina las salidas en régimen estacionario para los siguientes potenciales

(a) $V(t) = \operatorname{sen} t$ (b) $V(t) = \cos t$ (c) $V(t) = \begin{cases} 10 & t \in [0, 0{,}01) \\ 0 & t \in [0{,}01, 0{,}02) \end{cases}$

NOTA: La pregunta es equivalente a encontrar la respuesta al sistema cuando $t \to \infty$.