1. Encuentre las soluciones de los siguientes problemas de contorno:

   a) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0.$
   b) $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0.$
   c) $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0.$
   d) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0.$
   e) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$
   f) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0.$

2. Encuentre para qué valores de λ tienen soluciones no triviales los siguientes problemas de contorno:

   a) $y'' - 2y' + (1 + \lambda) y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$
   b) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

3. Clasifique las siguientes EDP:

   a) $3u_{xx} + 4u_{yy} - u = 0.$
   b) $4u_{xx} + u_{xy} + 4u_{yy} + u = 0.$
   c) $u_{xx} + u_{yy} + 3u_x - 4u_y + 25u = 0.$
   d) $u_{xx} - 3u_{yy} + 2u_x - u_y + u = 0.$
   e) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u = 0.$

4. Los extremos de una barra de aluminio ($\alpha^2 = 0{,}86$) de longitud 10 metros se mantienen a temperatura de 0^oC. Encuentre la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales:

   a) $u(0,x) = 70, \quad 0 \leq x \leq 10.$
   b) $u(0,x) = 70\cos x, \quad 0 \leq x \leq 10.$
   c) $u(0,x) = \begin{cases} 10x & x \in [0,5) \\ 10(10-x) & x \in [5,10] \end{cases}$
   d) $u(0,x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,3) \\ 65 & x \in [3,10] \end{cases}$

5. Los extremos de una barra de cobre ($\alpha^2 = 1{,}14$) de longitud 2 metros se mantienen a temperatura de 0^oC. Encuentre la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales:

   a) $u(0,x) = 65\cos^2(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 2.$
   b) $u(0,x) = 70 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq 2.$
   c) $u(0,x) = \begin{cases} 60x & x \in [0,1) \\ 60(2-x) & x \in [1,2] \end{cases}$
   d) $u(0,x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 75 & x \in [1,2] \end{cases}$

6. Un estado de equilibrio para la ecuación del calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ es aquella solución que no varía con el tiempo. Resuelva cada uno de los siguientes apartados:

   a) Demuestre que todos los equilibrios de la ecuación del calor son de la forma $u(x) = Ax + B$.

   b) Encuentre los estados de equilibrio de la ecuación del calor que cumplen las siguientes condiciones de contorno: $u(t,0) = T_1$ y $u(t,L) = T_2$.

   c) Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0,1) \\ u(0,x) = 75 & 0 < x < 1 \\ u(t,0) = 20 & t > 0 \\ u(t,1) = 60 & t > 0 \end{cases}$$

   Ayuda: Calcúle $u(t,x)$ como $u(t,x) = v(x) + w(t,x)$, donde $v(x)$ es el estado de equilibrio asociado a las condiciones de contorno $u(t,0) = 20$, $u(t,L) = 60$ y $u(t,x)$ es la solución del problema con condiciones de contorno nulas.

7. (*) Los extremos de una barra de cobre ($\alpha^2 = 1{,}14$) de longitud 10 centímetros se mantienen a temperatura de 0^oC, mientras que el centro de la barra es mantenido a 100^oC mediante una fuente de calor externa. Encuentra la variación de temperatura de la barra con el tiempo para la condición inicial

$$u(0,x) = \begin{cases} 50 & x \in [0,5) \\ 100 & x \in [5,10] \end{cases}.$$

   Ayuda: Descomponga el problema en dos problemas con uno de los extremos en la mitad de la barra.

8. Resuelva el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u, & t > 0, x \in (0,1) \\ u(0,x) = \cos x & 0 < x < 1 \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,L) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

9. Resuelva los siguientes problemas:

   a) $$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0,2\pi) \\ u(0,x) = \cos x - 1 & 0 < x < 2\pi \\ u_t(0,x) = 0 & 0 < x < 2\pi \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,2\pi) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

   b) $$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0,1) \\ u(0,x) = 0 & 0 < x < 1 \\ u_t(0,x) = 1 & 0 < x < 1 \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,2\pi) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$c)\quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0,3) \\ u(0,x) = f(x) & 0 < x < 3 \\ u_t(0,x) = 0 & 0 < x < 3 \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,2\pi) = 0 & t > 0 \end{cases} \qquad \text{donde } f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ 1 & x \in [1,2) \\ 2-x & x \in [2,3]. \end{cases}$$

10. Una cuerda de 10 metros fijada en sus extremos se levanta por el medio hasta la distancia de un metro y se suelta. Describa su movimiento con el tiempo suponiendo que $c^2 = 1$.

11. (*) Resuelva cada uno de los apartados:

    $a)$ Demuestre que el cambio de coordenadas

    $$\begin{cases} \alpha = x + ct \\ \beta = x - ct \end{cases}$$

    transforma la ecuación de ondas $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ en la ecuación $u_{\alpha\beta} = 0$. Concluir que la solución general de la ecuación será de la forma

    $$u(t,x) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

    para funciones apropiadas F y G.

    $b)$ Con la información del apartado anterior demuestre que la solución del problema

    $$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0,L) \\ u(0,x) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(0,x) = g(x) & 0 < x < L \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,L) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

    es de la forma

    $$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x - ct) + f(x + ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds.$$

12. Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + u, & t > 0, x \in (0,L) \\ u(0,x) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(0,x) = 0 & 0 < x < L \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,L) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

13. Resuelva los siguientes problemas de Laplace con condiciones de tipo Dirichlet:

a) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in(0,a)\times(0,b) \\ u(x,0)=0 & 0<x<a \\ u(x,b)=f(x) & 0<x<a \\ u(0,y)=0 & 0<y<b \\ u(a,y)=0 & 0<y<b \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in(0,a)\times(0,b) \\ u(x,0)=0 & 0<x<a \\ u(x,b)=0 & 0<x<a \\ u(0,y)=g(y) & 0<y<b \\ u(a,y)=0 & 0<y<b \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in(0,a)\times(0,b) \\ u(x,0)=f(x) & 0<x<a \\ u(x,b)=0 & 0<x<a \\ u(0,y)=g(y) & 0<y<b \\ u(a,y)=0 & 0<y<b \end{cases}$$

14. Resuelva los siguientes problemas de Laplace con condiciones de tipo Neumann

a) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in(0,a)\times(0,b) \\ u_x(0,y)=g(y) & 0<y<b \\ u_x(a,y)=0 & 0<y<b \\ u_y(x,0)=0 & 0<x<a \\ u_y(x,b)=0 & 0<x<a \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in(0,a)\times(0,b) \\ u_x(0,y)=0 & 0<y<b \\ u_x(a,y)=0 & 0<y<b \\ u_y(x,0)=f(x) & 0<x<a \\ u_y(x,b)=0 & 0<x<b \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in(0,a)\times(0,b) \\ u_x(0,y)=1 & 0<y<b \\ u_x(a,y)=0 & 0<y<b \\ u_y(x,0)=1 & 0<x<a \\ u_y(x,b)=0 & 0<x<a \end{cases}$$

15. Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=u, & (x,y)\in(0,1)\times(0,1) \\ u(x,0)=0 & 0<x<1 \\ u(x,1)=0 & 0<x<1 \\ u(0,y)=g(y) & 0<y<1 \\ u(1,y)=0 & 0<y<1 \end{cases}$$

(*) Ejercicios con dificultad especial.