Apéndice A

Álgebra de matrices

Denotaremos a $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de dimensión $m \times n$ (m filas y n columnas) con elementos en el conjunto de los número reales. Si $m = n$, la matriz se denomina **matriz cuadrada**.

Un vector de $M_{1\times n}(\mathbb{R})$ se denomina **vector fila,** mientras que un vector de $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$, se denomina **vector columna.**

Una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se suele representar mediante sus elementos como $A{=}(a_{ij})$. Diremos entonces que a_{ij} es el elemento de la i-ésima fila y la j-ésima columna.

Los elementos a_{ii} de una matriz cuadrada, son los elementos de la **diagonal principal.**

Definición A.1 *Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, denominamos **traspuesta** de A, $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, que tiene como filas las columnas de la matriz A, y como columnas, las filas de A. Es decir, si $a^*_{i,j}$ representa el elemento de la fila i, columna j, de la matriz A^T, entonces*

$$a^*_{ij} = a_{ji}$$

Definición A.2 *Una matriz cuadrada se dice **simétrica** si ocurre lo siguiente*

$$A = A^T$$

Definición A.3 *Una matriz cuadrada es **diagonal** si todos los elementos que no están dentro de la diagonal principal son 0, es decir*

$$A \text{ es diagonal } \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad si \quad i \neq j$$

Definición A.4 *La **matriz identidad** es una matriz diagonal en la que todos los elementos son iguales a 1*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

También se puede escribir

$$I_n = (\delta_{ij})$$

siendo δ_{ij} la función delta Kronecker definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Definición A.5 *Una matriz cuadrada se dice que es **triangular superior** si todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal son 0*

$$T_s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow a_{ij} = 0 \text{ si } i > j.$$

Análogamente una matriz cuadrada se dice ***triangular inferior*** *si todos los elementos que se encuentran por encima de la diagonal superior son* 0

$$T_i = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow a_{ij} = 0 \text{ si } i < j$$

Definición A.6 *Una matriz* ***banda*** *es una matriz que tiene todos los elementos iguales a cero, excepto una banda centrada sobre la diagonal principal. Por ejemplo la matriz*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es una matriz con un ancho de banda de 3*, y que recibe el nombre especial de* ***matriz tridiagonal.***

Operaciones con matrices

Definición A.7 *Si* $A = (a_{ij})$ *y* $B = (b_{ij})$ *son matrices de* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$*, definimos la matriz* $A + B$*, como otra matriz* $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*, que cumple*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Para poder hacer la suma de dos matrices, ambas deben tener la misma dimensión.

Definición A.8 *Si* $A = (a_{ij}) \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ *y* $B = (b_{ij}) \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$*, definimos la matriz* AB*, como otra matriz* $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*, que cumple*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \qquad i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n$$

como se observa solamente se puede efectuar la multiplicación de matrices, cuando el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda. Claramente el producto de dos matrices no es conmutativo*.*

Definición A.9 *Si* $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$*, definimos la matriz* λA*, como otra matriz* $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*, que cumple*

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Definición A.10 *Si* $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*, diremos que* A *es* ***invertible*** *, si existe otra matriz* $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*, que cumple*

$$AB = I_n$$

en este caso se expresa

$$B = A^{-1}$$

y la matriz A^{-1}*, se denomina matriz* ***inversa*** *de* A*.*

Definición A.11 *Diremos que dos matrices* A *y* B *son* **semejantes** $\iff$ *Existe otra matriz* P *invertible que verifica*

$$B = P^{-1}AP$$

Definición A.12 *Diremos que* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *es* diagonalizable*, si y sólo si,* $\exists D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$*,* D *matriz diagonal, semejante a la matriz* A*, es decir,* $\exists P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *invertible, llamada matriz de paso o matriz de cambio de base, tal que*

$$A = P^{-1}DP$$

©SPH

Definición A.13 *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada* $n \times n$*, definimos el* ***determinante*** *de* $\mathbf{A}$ *como*

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A}) &= a_{11}, n = 1 \\ det(\mathbf{A}) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} det(\mathbf{A}_{ik}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} det(\mathbf{A}_{kj}) \end{aligned}$$

Definición A.14 *Sea* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, *definimos* matriz complementaria $\mathbf{A}_{ij}$, *(*$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$*), a la matriz de* $\mathrm{M}_{m-1\times n-1}$*, que se obtiene a partir de la matriz A, cuando eliminamos la fila i y la columna j*

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & a_{1n} \\ & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & a_{i+1,n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m,k-1} & a_{m,k+1} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Definimos el menor complementario del elemento a_{ij}, *al determinante de la matriz complementaria*

$$\Delta_{ij} = \det(A_{ij})$$

Se llama adjunto del elemento a_{ij} *al número*

$$(-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$$

Valores y vectores propios

Dada una matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, diremos que el vector $v \neq 0$, es un **vector propio** de A de **valor propio** λ cuando

$$Av = \lambda v$$

La condición anterior puede ser escrita en la forma $(A - \lambda I)v = 0$. Para que este sistema de ecuaciones tenga soluciones no nulas es necesaro y suficiente que λ cumpla la *ecuación característica*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

así, los valores propios de A son los ceros del polinomio $p_A(\lambda)$, llamado también **polinomio característico de** A.

Ejemplo A.1 *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

tiene por ecuación característica

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)(3-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

de soluciones $\lambda_1 = 4$ *y* $\lambda_2 = 2$*. Estas soluciones son por tanto valores propios de* A*.*

Propiedades

Dadas $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, se cumplen las siguientes propiedades

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(AB)^T = B^T A^T$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, siempre que existan A^{-1} y B^{-1}
4. $\det\left(A^T\right) = \det(A)$
5. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

©SPH

©SPH