512103005 - Cálculo Numérico - Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales
10 de noviembre de 2021
Primer Parcial - Duración: 120 minutos

APELLIDOS y NOMBRE: DNI/NIE:

Firma:

TIPO EXAMEN:
[X] PRIMER PARCIAL [ ] SEGUNDO PARCIAL [ ] PROBLEMAS MESA:

OBSERVACIONES Y REQUISITOS

- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Pon el nombre y los apellidos en cada hoja de las respuestas y entrégalos junto con el enunciado, debidamente rellenado.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca en lápiz o en color rojo**. **Escribe con claridad**, si la respuesta dada a un problema no se entiende o presenta un aspecto incoherente, sucio, desordenado o caótico será puntuada con un 0, recuerda que puedes utilizar todo los folios que necesites.
- **Extracto de las reglas de la convocatoria:** Terminantemente prohibido el uso de móviles. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes a la prueba. **NO** se podrá abandonar el examen durante la primera media hora. **NO** se podrá salir del aula durante la realización de la prueba.

  Cualquier violación de estas reglas o acción irregular realizada durante la prueba será motivo de expulsión de la misma y una calificación final en la asignatura de 0.
- **MUY IMPORTANTE: Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado o que no incluyan todos los cálculos realizados serán puntuados con** 0.
- El examen está puntuado sobre 10.
- La nota del examen es el 35 % de la nota final, siempre que sea superior o igual a 4 sobre 10.

A. Primer Parcial (35 %)

1. Se consideran las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 12 & 26 & 4 \\ 0 & 9 & 12 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

   a) (**1.5 puntos**) Encuentra, justificando su aplicación, la descomposición LU de la matriz A_1.

   b) (**1.0 puntos**) Encuentra, justificando su aplicación, la descomposición Cholesky de la matriz A_2

   c) (**1.0 puntos**) Indica si el método de Jacobi es convergente para el siguiente sistema

$$A_3 x = b$$

   con $b = (1, 2, 3)$. Construye la matriz de iteración, describe el procedimiento para resolver el sistema con este método y efectúa una iteración del mismo a partir del valor inicial $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. (**2.0 puntos**) Calcula un valor aproximado de $\sqrt[3]{7}$ utilizando para ello tres iteraciones del método de Newton-Raphson y la función $f(x)$ adecuada. Justifica si el método converge al comenzar con el valor inicial $x_0 = 3$. (Valor exacto: $\sqrt[3]{7} \simeq 1{,}912931182772389$)

3. Utilizando el polinomio interpolador correspondiente y el método de diferencias divididas de Newton para su construcción, responde a cada uno de los apartados

    $a)$ (**1.75 puntos**) Calcula $\sqrt{3}$ utilizando la función $f(x) = 3^x$ y los nodos $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$. Compara con el valor exacto $\sqrt{3} \simeq 1{,}732050807568877$.

    $b)$ (**1 punto**) Deduce un cota teórica del error de interpolación en el cálculo de $\sqrt{3}$ y compáralo con el error obtenido en el apartado anterior. Explica el resultado.

4. (**1.75 puntos**) Determine una función spline cúbica $S(x)$ que interpole los puntos $(-1,0), (0,1)$ y $(1,0)$, usando las condiciones naturales $S''(-1) = S''(1) = 0$.

---

1. Encuentra el polinomo que interpola a la función $f(x) = \frac{12}{1+x}$ en los nodos $x_i = 1, 2, 3$, usando el método de Newton. Aprovechando los cálculos anteirores encuentra el nuevo polinomio de interpolación que se obtiene si se ñade un nuevo nodo, $x_3 = 0$.

2. Determine una función spline cúbica que interpole los puntos $(-1, 0), (0, 1)$ y $(1, 0)$, usa condiciones naturales.

3. (2.0 puntos) Suponga que los siguientes datos han sido obtenidos experimentalmente

x	$f(x)$
1,00	1,27
1,01	1,32
1,02	1,38

4. Utiliza 3 iteraciones de los métodos Bipartición y Newton para encontrar la solución de la siguiente ecuación:

$$x - \cos x = 0 \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

utilizando los métodos de: Bisección, Régula Falsi, Secante y Newton ($x_0 = 0$)