512103005 - Cálculo Numérico - Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales
13 de diciembre de 2021
Segundo Parcial - Duración: 120 minutos

APELLIDOS y NOMBRE: DNI/NIE:

Firma:

TIPO EXAMEN:
☐ PRIMER PARCIAL ☒ SEGUNDO PARCIAL ☐ PROBLEMAS MESA:

OBSERVACIONES Y REQUISITOS

- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Pon el nombre y los apellidos en cada hoja de las respuestas y entrégalos junto con el enunciado, debidamente rellenado.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca en lápiz o en color rojo**. **Escribe con claridad**, si la respuesta dada a un problema no se entiende o presenta un aspecto incoherente, sucio, desordenado o caótico será puntuada con un 0, recuerda que puedes utilizar todo los folios que necesites.
- **Extracto de las reglas de la convocatoria:** Terminantemente prohibido el uso de móviles. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes a la prueba. **NO** se podrá abandonar el examen durante la primera media hora. **NO** se podrá salir del aula durante la realización de la prueba.

  Cualquier violación de estas reglas o acción irregular realizada durante la prueba será motivo de expulsión de la misma y una calificación final en la asignatura de 0.
- **MUY IMPORTANTE: Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado o que no incluyan todos los cálculos realizados serán puntuados con** 0.
- El examen está puntuado sobre 10.
- La nota del examen es el 35 % de la nota final, siempre que sea superior o igual a 4 sobre 10.

B. SEGUNDO PARCIAL (35 %)

1. Usando la función

$$f(x) = e^{-x^2}$$

se ha construido la siguiente tabla de valores

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$f(x)$	0,3679	0,2369	0,1409	0,0773	0,0391	0,0183

a) (**0.5 puntos**) Calcula $f'(1{,}4)$ y $f''(1{,}4)$, usando para ello las fórmulas de derivación numérica de diferencias centrales. Compara con los valores exactos.

b) (**1 punto**) Calcula, usando la regla del trapecio

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

c) (**1 punto**) Calcula la integral anterior usando las reglas de Simpson que consideres adecuadas.

2. **(2 puntos)** Calcula una aproximación numérica de la siguiente integral

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^1 y^2 \cos x dx dy$$

utilizando la **mínima** regla de cuadratura de Gauss que garantice una integración exacta para polinomios de grado 2 en cada dirección. En la siguientes tablas se indican los pesos (w) y nodos (ξ) del métodos de Gauss para 1, 2, 3 y 4 nodos.

w	ξ
0	2

w	$\xi <<$
1	$-0{,}5773$
1	$0{,}5773$

w	ξ
5/9	$-0{,}7746$
8/9	0
5/9	$0{,}7746$

w	ξ
0,3478	$-0{,}8611$
0,6521	$-0{,}3399$
0,6521	$0{,}3399$
0,3478	$0{,}8611$

3. Considera el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) + u(t) = e^t & t \geq 0 \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Transforma el problema asociado a la ecuación diferencial de segundo orden en un problema de condiciones iniciales asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

   $a)$ (**1.25 puntos**) Obtén una aproximación numérica de la solución $u(t)$ del problema en el intervalo $[0,3]$, para 3 subintervalos de la misma longitud, usando el **método de Euler explícito**. Indica si el método es estable para esta discretización del intervalo y en caso contrario, indica qué hacer para garantizar la estabilidad.

   $b)$ (**1.25 puntos**) Obtén una aproximación numérica de la solución $u(t)$ del problema en el intervalo $[0,3]$, para 3 subintervalos de la misma longitud, usando el **método de Euler implícito**. Indica si este método es estable para esta discretización del intervalo, en caso contrario, indica qué hacer para garantizar la estabilidad.

4. Dado el problema

$$(\text{P}) \begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & x \in [0,3] \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(3,t) = 0 \\ u(x,0) = x(x-3) \end{cases}$$

Considera una discretización de $x \in [0,3]$ en 3 subintervalos de la misma longitud y 3 intervalos de tiempo equidistantes, separados Δt:

   $a)$ (**0.5 puntos**) Determina el valor o valores de Δt para que la discretización resultante sea estable si utilizáramos el **método explícito de Euler**.

   $b)$ (**1 punto**) Calcula la solución numérica para 3 instantes de tiempo consecutivos, usando el método explícito de Euler y un valor Δt que garantice la estabilidad.

   $c)$ (**1 punto**) Calcula la solución numérica para 3 instantes de tiempo consecutivos, usando el método implícito de Euler y el mismo valor de Δt que has usado en el apartado anterior.

5. (**0.5 puntos**) Usando diferencias finitas y el método de Euler explícito, indica **SIN RESOLVER**, cómo se obtendría la solución numérica del siguiente problema de onda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & t > 0, x \in (0,1) \\ u(x,0) = 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(1,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$