Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales
Cálculo Numérico
Problemas Temas 2
Resolución de Sistemas Lineales

1. Resuelve el sistema

$$(\mathbf{A}|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

por el método de Gauss

   a) sin pivotaje.
   b) con pivotaje maximal por columnas.
   c) con pivotaje completo.

2. Realiza la factorización LU de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Resuelve el sistema

$$(A|\,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 3 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 3 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 1 \end{array}\right)$$

obteniendo primeramente una factorización $A = LDL^T$ con L triangular inferior con unos en la diagonal y D diagonal. Explicita la factorización de Cholesky de A.

4. Resuelve el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 35 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 21 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 8x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 7x_4 & = & 4 \end{array}\right\}$$

por los métodos iterativos de

   a) Jacobi
   b) Gauss-Seidel

5. ¿Cómo pueden utilizarse los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales para determinar la inversa de una matriz?. Aplicarlo al cáculo de la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Deduce a partir del método de Gauss-Jordan un método para hallar la inversa de una matriz.

   a) Resuelve el sistema
$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 0{,}1y & - & 0{,}2z & = & 7{,}85 \\ 0{,}1x & + & 7y & - & 0{,}3z & = & -19{,}3 \\ 0{,}3x & - & 0{,}2y & + & 10z & = & 71{,}4 \end{array}\right\}$$
   mediante el método de Gauss-Jordan

   b) Calcula la inversa de la matriz de coeficientes utilizando el método de Gauss-Jordan deducido en la primera parte del problema, y resolver el sistema utilizando la matriz inversa.

7. Halla la factorización LU de la matriz A, y explica el resultado.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Resuelve el sistema
$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6 \\ -x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & 15 \end{array}\right\}$$
   Transformando el sistema $Ax = b$ en un sistema de la forma $x = Tx + c$, y empleando un método iterativo de la forma
$$x^{(k+1)} = \mathbf{T}x^{(k)} + c$$
   (Notar que este es el método iterativo de Jacobi).

   Emplear el método de Gauss-Seidel para la resolución del sistema anterior.

9. Considera las matrices K_3, C_3, T_3 y B_3.

   a) Calcula sus determinantes y concluye cuáles de las matrices anteriores son invertibles.

   b) Calcula sus valores propios y concluye de ellos cuáles son definidas positivas y cuales semi-definidas positivas.

   c) Calcula, cuando sea posible, sus descomposiciones LU y Cholesky. Cuando no sea posible, explica por qué no es posible calcular dichas composiciones.

10. Explica cómo, a partir de la factorización $A = LU$, se calcula el determinante de A. Como aplicación, calcula el determinante de K_n (*).

11. Calcula los autovalores y autovectores de las matrices K_n, C_n, B_n y T_n.

12. Teniendo en cuenta que los autovalores de la matriz K_n son $\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, deduce que el número de condicionamiento de K_n es aproximadamente $\frac{4}{\pi^2}(n+1)^2$.

13. Sea A una matriz con número de condicionamiento $c(A) = 100$. Supongamos que el error porcentual cometido al calcular el término independiente b en el sistema $Ax = b$ es del 10 %. Calcula una estimación

    del error porcentual en la solución x.

14. Consideremos la matriz

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcula las matrices de iteración M_J y M_{GS}, respectivamente de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Calcula los radios espectrales de dichas matrices y comprueba que $\rho_{GS} = \rho_J^2$.

15. Calcula una estimación del radio espectral de la matriz $M_n = I_n - \frac{1}{2}K_n$ que aparece al aplicar el método de Jacobi a la matriz K_n.

16. (OCTAVE) Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejecuta en Octave las siguientes instrucciones: `x=rand(3,1); z = x/norm(x);` que genera un vector aleatorio unitario y de 3 componentes. Finalmente repetimos 15 veces las siguientes órdenes: `y=A*z; [zm, j] = max(abs(z)); lambda=y(j)/z(j); z=y/norm(y); lambda`

Comprueba que lo calculado es una aproximación al autovalor dominante (el mayor) de A y de su autovector asociado.

Este método, que se ha de describir en forma algorítmica, se conoce con el nombre de Método de la Potencia. Es el método que usa (o usaba) el algoritmo PageRank de Google para ordenar las páginas web de una búsqueda por internet.
