Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales
Cálculo Numérico
Problemas Temas 2
Resolución de Sistemas Lineales

1. Resuelve el sistema

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

por el método de Gauss:

a) Sin pivotaje.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1^1 = F_1 \\ F_2^1 = F_2 - 2F_1 \\ F_3^1 = F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1^2 = F_1^1 \\ F_2^2 = F_2^1 \\ F_3^3 = F_3^2 + \frac{2}{3}F_2^2 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{4}{3} \end{array}\right)$$

La solución del sistem triangular resultante es

$$4z = -\frac{4}{3} \Rightarrow z = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} -2y + 2z &= -4 \Leftrightarrow -y + z = -2 \Leftrightarrow y = z + 2 = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3} \\ x + y &= 4 \Leftrightarrow x = 4 - y = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

b) Con pivotaje maximal por columnas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Para el pivote inicial elegimos la primera columna y elegimos el elemento con mayor valor, es decir el 2, por tanto intercambiamos filas 1 y 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1^1 = F_2 \\ F_2^1 = F_1 \\ F_3^1 = F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1^2 = F_1^1 \\ F_2^2 = F_2^1 - \frac{1}{2}F_1^1 \\ F_3^2 = F_3^1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Pasamos a la siguiente columna y elegimos el valor 3, por ser el más alto (no se cuenta la fila 1 que se ha utilizado en el primer paso), intercambiamos por tanto fila 2 y fila 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1^3 = F_1^2 \\ F_2^3 = F_3^2 \\ F_3^3 = F_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1^4 = F_1^3 \\ F_2^4 = F_2^3 \\ F_3^4 = F_3^3 - \frac{1}{3}F_2^3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

y resolvemos el sistema triangular resultante

$$-2z = \frac{2}{3} \Rightarrow z = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} 3y + 3z &= 4 \Leftrightarrow 3y = 4 - 3z \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(4 - 3z) = \frac{1}{3}(4 - (-1)) = \frac{5}{3} \\ 2x + 2z &= 4 \Leftrightarrow x = 2 - z = 2 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$c)$ Con pivotaje completo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Para el pivote inicial podemos elegir tanto el elemento $A(3,2)$ como el elemento $A(3,3)$ ya que ambos tienen el mismo valor absoluto, 3, que es el mayor de todos los elementos. Elegiremos el $A(3,2)$, por tanto hay que hacer una permutación en la fila y también en la columna. Por claridad, se incluye una fila adicional con el nombre de la variable

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} z & y & x & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right) \end{array}
\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1^1 = F_3 \\ F_2^1 = F_2 \\ F_3^1 = F_1 \end{array} \right\}
$$

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} z & y & x & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \end{array}
\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1^2 = F_1^1 \\ F_2^2 = F_2^1 - \frac{2}{3} F_1^1 \\ F_3^2 = F_3^1 \end{array} \right\} \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} z & y & x & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \end{array}
$$

Podemos pivotar sobre el elemento correspondiente, puesto que es el de mayor valor absoluto de las filas 2 a 3

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} z & y & x & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \end{array}
\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1^3 = F_1^2 \\ F_2^3 = F_2^3 \\ F_3^3 = F_3^2 + \frac{1}{2} F_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow
$$

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} z & y & x & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{14}{3} \end{array}\right) \end{array}
$$

y resolvemos el sistema triangular resultante, teniendo en cuenta el cambio de variable reflejado

$$
2x = \frac{14}{3} \Rightarrow x = \frac{7}{3}
$$

$$
\begin{aligned}
-2y + 2x &= \frac{4}{3} \Leftrightarrow y = x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \\
3z + 3y &= 4 \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}(4 - 3y) = \frac{1}{3}\left(4 - 3\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

2. Realiza la factorización LU de la matriz

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}
$$

Solución: Las matrices L y U serían

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}
$$

es decir

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & u_{22}+l_{21}u_{12} & u_{23}+l_{21}u_{13} & u_{24}+l_{21}u_{14} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & u_{33}+l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23} & u_{34}+l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & u_{44}+l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Resolvemos:

a) Primera fila de U

$$\begin{aligned} u_{11} &= 1 \\ u_{12} &= 1 \\ u_{13} &= 0 \\ u_{14} &= 0 \end{aligned}$$

b) Primera columna de L, usando los datos anteriores

$$\begin{aligned} l_{21}u_{11} &= 1 \Rightarrow l_{21}\cdot 1 = 1 \Rightarrow l_{21} = 1 \\ l_{31}u_{11} &= 0 \Rightarrow l_{31}\cdot 1 = 0 \Rightarrow l_{31} = 0 \\ l_{41}u_{11} &= 0 \Rightarrow l_{41}\cdot 1 = 0 \Rightarrow l_{41} = 0 \end{aligned}$$

c) Segunda fila de U

$$\begin{aligned} l_{21}u_{12}+u_{22} &= 2 \Rightarrow 1\cdot 1 + u_{22} = 2 \Rightarrow u_{22} = 1 \\ l_{21}u_{13}+u_{23} &= 1 \Rightarrow 1\cdot 0 + u_{23} = 1 \Rightarrow u_{23} = 1 \\ l_{21}u_{14}+u_{24} &= 0 \Rightarrow 1\cdot 0 + u_{24} = 0 \Rightarrow u_{24} = 0 \end{aligned}$$

d) Segunda columna de L

$$\begin{aligned} l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} &= 1 \Rightarrow 0\cdot 1 + l_{32}\cdot 1 = 1 \Rightarrow l_{32} = 1 \\ l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} &= 0 \Rightarrow 0\cdot 1 + l_{42}\cdot 1 = 0 \Rightarrow l_{42} = 0 \end{aligned}$$

e) Tercera fila de U

$$\begin{aligned} l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} &= 3 \Rightarrow 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + u_{33} = 3 \Rightarrow u_{33} = 2 \\ l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} &= 1 \Rightarrow 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + u_{34} = 1 \Rightarrow u_{34} = 1 \end{aligned}$$

f) Tercera columna de L

$$l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} = 1 \Rightarrow 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + l_{43}\cdot 2 = 1 \Rightarrow l_{43} = \frac{1}{2}$$

g) Cuarta fila de U y cuarta columna de L

$$l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} = 4 \Rightarrow 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 + u_{44} = 4 \Rightarrow u_{44} = \frac{7}{2}$$

La descomposición es

$$
\begin{aligned}
L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
U &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}
$$

podemos comprobar que $LU = A$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}
$$

3. Resuelve el sistema

$$
(\,A|\,b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 11 & 9 & 3 \\ 6 & 9 & 22 & 7 \end{array}\right)
$$

obteniendo primeramente una factorización $A = LDL^T$ con L triangular inferior con unos en la diagonal y D diagonal. A partir de la factorización anterior, encuentra la factorización de Cholesky de A.

Solución: La descomposición propuesta para la matriz A es de la forma

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

es decir

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 l_{21} & \lambda_1 l_{31} \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_2 l_{32} \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 l_{21} & \lambda_1 l_{31} \\ \lambda_1 l_{21} & \lambda_1 l_{21}^2 + \lambda_2 & \lambda_2 l_{32} + \lambda_1 l_{21} l_{31} \\ \lambda_1 l_{31} & \lambda_2 l_{32} + \lambda_1 l_{21} l_{31} & \lambda_1 l_{31}^2 + \lambda_2 l_{32}^2 + \lambda_3 \end{pmatrix}
$$

e igualando a la matriz A

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 l_{21} & \lambda_1 l_{31} \\ \lambda_1 l_{21} & \lambda_1 l_{21}^2 + \lambda_2 & \lambda_2 l_{32} + \lambda_1 l_{21} l_{31} \\ \lambda_1 l_{31} & \lambda_2 l_{32} + \lambda_1 l_{21} l_{31} & \lambda_1 l_{31}^2 + \lambda_2 l_{32}^2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 11 & 9 \\ 6 & 9 & 22 \end{pmatrix}
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 2\\
\lambda_1 l_{21} &= 4 \Rightarrow l_{21} = \frac{4}{2} = 2\\
\lambda_1 l_{31} &= 6 \Rightarrow l_{31} = \frac{6}{2} = 3\\
\lambda_1 l_{21}^2 + \lambda_2 &= 11 \Rightarrow 2 \cdot 2^2 + \lambda_2 = 11 \Rightarrow \lambda_2 = 3\\
\lambda_2 l_{32} + \lambda_1 l_{21} l_{31} &= 9 \Rightarrow 3 \cdot l_{32} + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 9 \Rightarrow l_{32} = -1\\
\lambda_1 l_{31}^2 + \lambda_2 l_{32}^2 + \lambda_3 &= 22 \Rightarrow 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-1)^2 + \lambda_3 = 22 \Rightarrow \lambda_3 = 1
\end{aligned}
$$

y por tanto

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La descomposición Cholesky se puede obtener expresando D como

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$A = L_C L_C^T$$

donde

$$L_C = LD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Notar que

$$(LD)^T = D^T L^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es precisamente L_C^T.

4. Resuelve el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 8x_3 & - & 2x_4 & = & -3 \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 7x_4 & = & 5 \end{array}\right\}$$

por los métodos iterativos de

a) Jacobi: Manual (2 pasos).

b) Gauss-Seidel: Manual (2 pasos).

c) Comprueba el error cometido en cada uno de los apartados anteriores, sabiendo que la solución exacta es $x = (1, -1, 1, -1)$.

d) Usa OCTAVE para encontrar la solución por los dos métodos iterativos: Jacobi y Gauss-Seidel.

Solución: El sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -8 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar que A es diagonal dominante

$$|a_{11}| = 5 > |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = 3 + 1 + 0 = 4$$

$$|a_{22}| = 6 > |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = 2 + 2 + 1 = 5$$

$$|a_{33}| = 8 > |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = 1 + 2 + 2 = 5$$

$$|a_{44}| = 7 > |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = 3 + 1 + 2 = 6$$

por tanto los métodos iterativos convergen para cualquier punto de partida que elijamos.

a) Para el método de Jacobi se construye la sucesión

$$Dx^{k+1} = (D - A)\, x^k + b$$

donde D es la diagonal de A

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow D - A = -\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 5x_1^{k+1} \\ 6x_2^{k+1} \\ -8x_3^{k+1} \\ -7x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - x_3^k - 3x_2^k \\ -2x_1^k - 2x_3^k - x_4^k - 3 \\ 2x_2^k - x_1^k + 2x_4^k - 3 \\ 3x_1^k - x_2^k - 2x_3^k + 5 \end{pmatrix}$$

Tomamos por ejemplo el origen como punto de partida, es decir

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación obtendremos el punto x^1

$$\begin{pmatrix} 5x_1^1 \\ 6x_2^1 \\ -8x_3^1 \\ -7x_4^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - x_3^0 - 3x_2^0 \\ -2x_1^0 - 2x_3^0 - x_4^0 - 3 \\ 2x_2^0 - x_1^0 + 2x_4^0 - 3 \\ 3x_1^0 - x_2^0 - 2x_3^0 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ x_4^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

y con la segunda iteración, calculamos x^2

$$\begin{pmatrix} 5x_1^2 \\ 6x_2^2 \\ -8x_3^2 \\ -7x_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - x_3^1 - 3x_2^1 \\ -2x_1^k - 2x_3^1 - x_4^1 - 3 \\ 2x_2^k - x_1^1 + 2x_4^1 - 3 \\ 3x_1^k - x_2^1 - 2x_3^1 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \left(\frac{3}{8}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) \\ -2\left(\frac{3}{5}\right) - 2\left(\frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{5}{7}\right) - 3 \\ 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{5}\right) + 2\left(-\frac{5}{7}\right) - 3 \\ 3\left(\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{3}{8}\right) + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{8} \\ -\frac{593}{140} \\ -\frac{211}{35} \\ \frac{131}{20} \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\frac{33}{8} \\ -\frac{1}{6}\frac{593}{140} \\ \frac{1}{8}\frac{211}{35} \\ -\frac{1}{7}\frac{131}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{40} \\ -\frac{593}{840} \\ \frac{211}{280} \\ -\frac{131}{140} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0{,}825 \\ -0{,}705\,95 \\ 0{,}753\,57 \\ -0{,}935\,71 \end{pmatrix}$$

b) Para el método de Gauss-Seidel se construye la sucesión

$$Lx^{k+1} = (L - A)\,x^k + b$$

donde L es la matriz triangular inferior

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -8 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow L - A = -\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -8 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

: es decir

$$\begin{pmatrix} 5x_1^{k+1} \\ 2x_1^{k+1} + 6x_2^{k+1} \\ x_1^{k+1} - 2x_2^{k+1} - 8x_3^{k+1} \\ x_2^{k+1} - 3x_1^{k+1} + 2x_3^{k+1} - 7x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - x_3^k - 3x_2^k \\ -2x_3^k - x_4^k - 3 \\ 2x_4^k - 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Volvemos a tomar el origen como punto de partida, es decir

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación obtendremos el punto x^1

$$\begin{pmatrix} 5x_1^1 \\ 2x_1^1 + 6x_2^1 \\ x_1^1 - 2x_2^1 - 8x_3^1 \\ x_2^1 - 3x_1^1 + 2x_3^1 - 7x_4^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema triangular

$$x_1^1 = \frac{3}{5}$$

$$2x_1^1 + 6x_2^1 = -3 \Rightarrow x_2^1 = \frac{1}{6}\left(-3 - 2x_1^1\right) = \frac{1}{6}\left(-3 - 2\left(\frac{3}{5}\right)\right) = -\frac{7}{10}$$

$$x_1^1 - 2x_2^1 - 8x_3^1 = -3 \Rightarrow x_3^1 = -\frac{1}{8}\left(-3 + 2x_2^1 - x_1^1\right) = -\frac{1}{8}\left(-3 + 2\left(-\frac{7}{10}\right) - \frac{3}{5}\right) = \frac{5}{8}$$

$$x_2^1 - 3x_1^1 + 2x_3^1 - 7x_4^1 = 5 \Rightarrow x_4^1 = -\frac{1}{7}\left(5 - x_2^1 + 3x_1^1 - 2x_3^1\right) = -\frac{1}{7}\left(5 - \left(-\frac{7}{10}\right) + 3\left(\frac{3}{5}\right) - 2\left(\frac{5}{8}\right)\right) = -\frac{25}{28}$$

y con la segunda iteración, calculamos x^2

$$\begin{pmatrix} 5x_1^2 \\ 2x_1^2 + 6x_2^2 \\ x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_3^2 \\ x_2^2 - 3x_1^2 + 2x_3^2 - 7x_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - x_3^1 - 3x_2^1 \\ -2x_3^1 - x_4^1 - 3 \\ 2x_4^1 - 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \left(\frac{5}{8}\right) - 3\left(-\frac{7}{10}\right) \\ -2\left(\frac{5}{8}\right) - \left(-\frac{25}{28}\right) - 3 \\ 2\left(-\frac{25}{28}\right) - 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{179}{40} \\ -\frac{47}{14} \\ -\frac{67}{14} \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el nuevo sistema triangular

$$5x_1^2 = \frac{179}{40} \Rightarrow x_1^2 = \frac{179}{200}$$

$$2x_1^2 + 6x_2^2 = -\frac{47}{14} \Rightarrow x_2^2 = \frac{1}{6}\left(-\frac{47}{14} - 2x_1^2\right) = \frac{1}{6}\left(-\frac{47}{14} - 2\left(\frac{179}{200}\right)\right) = -\frac{1201}{1400}$$

$$x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_3^2 = -\frac{67}{14} \Rightarrow x_3^2 = -\frac{1}{8}\left(-\frac{67}{14} - x_1^2 + 2x_2^2\right) = -\frac{1}{8}\left(-\frac{67}{14} - \left(\frac{179}{200}\right) + 2\left(-\frac{1201}{1400}\right)\right) = \frac{2071}{2240}$$

$$x_2^2 - 3x_1^2 + 2x_3^2 - 7x_4^2 = 5 \Rightarrow x_4^2 = -\frac{1}{7}\left(5 - x_2^2 + 3x_1^2 - 2x_3^2\right) = -\frac{1}{7}\left(5 - \left(-\frac{1201}{1400}\right) + 3\left(\frac{179}{200}\right) - 2\left(\frac{2071}{2240}\right)\right) =$$

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{179}{200} \\ -\frac{1201}{1400} \\ \frac{2071}{2240} \\ -\frac{153}{160} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0{,}895 \\ -0{,}857\,86 \\ 0{,}924\,55 \\ -0{,}956\,25 \end{pmatrix}$$

c) Como se indica en el enunciado, la solución del problema es $x^* = (1, -1, 1, -1)$, por tanto en dos iteraciones del método Jacobi tenemos un error cuadrático

$$\begin{aligned} e_J &= \left\|x^2 - x^*\right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0{,}825 \\ -0{,}705\,95 \\ 0{,}753\,57 \\ -0{,}935\,71 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -0{,}175 \\ 0{,}294\,05 \\ -0{,}246\,43 \\ 0{,}064\,29 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(-0{,}175)^2 + (0{,}29405)^2 + (-0{,}24643)^2 + (0{,}06429)^2} = 0{,}426\,56 \end{aligned}$$

Mientras que para el método de Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} e_{GS} &= \|x^2 - x^*\| = \left\| \begin{pmatrix} 0{,}895 \\ -0{,}857\,86 \\ 0{,}924\,55 \\ -0{,}956\,25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -0{,}105 \\ 0{,}142\,14 \\ -0{,}075\,45 \\ 0{,}043\,75 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(-0{,}105)^2 + (0{,}142\,14)^2 + (-0{,}075\,45)^2 + (0{,}043\,75)^2} = 0{,}197\,07 \end{aligned}$$

Con lo que podemos comprobar que se comete un error menor que con el método de Jacobi.

d) Prácticas

5. ¿Cómo se pueden utilizar los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales para determinar la inversa de una matriz?. Aplícalo al cáculo de la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución: Por definición A^{-1}, la inversa de una matriz A, cumple

$$AA^{-1} = I$$

Teniendo en cuenta la definición del producto de matrices, si $A = (a_{ij})$ y $A^{-1} = (b_{ij})$, entonces está claro que

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

siendo δ_{ij} la función delta de Kronecker, definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ & \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Si fijamos una columna, por ejemplo $j = 1$, entonces los elementos de esa columna serían

$$\delta_{i1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k1}$$

que nos proporciona un sistema de n ecuaciones en las n incógnitas b_{k1}, $k = 1, \ldots, n$, que además sería la columna 1 de la matriz inversa. Explicado de otro modo, podemos obtener las n columnas de A^{-1} resolviendo los n sistemas

$$A \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = e_j$$

para cada $j = 1, \ldots n$. Para calcular la inversa de la matriz A, tenemos que resolver los tres sistemas siguientes

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cuyas soluciones son $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{24}, \frac{1}{4}\right)$ y por tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Podemos comprobarlo, haciendo el producto de A por A^{-1}

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

:

6. Halla la factorización LU de la matriz A, y explica el resultado.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: La descomposición LU, si existiera, sería de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ l_{21}u_{11} & u_{22} + l_{21}u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, por una parte

$$u_{11} = 0$$

pero por otra

$$l_{21}u_{11} = 1$$

y no hay solución. Eso quiere decir que A no puede descomponerse en producto LU, ¿por qué? Si nos fijamos en los elementos de la diagonal, uno de ellos es nulo.

Si premultiplicamos por una matriz que cambie el orden de las filas

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces podemos realizar la descomposición de la nueva matriz

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ l_{21}u_{11} & u_{22} + l_{21}u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso

$$\begin{aligned} u_{11} &= 1 \\ u_{12} &= 1 \\ l_{21}u_{11} &= 0 \Rightarrow l_{21} = 0 \\ u_{22} + l_{21}u_{12} &= 1 \Rightarrow u_{22} = 1 \end{aligned}$$

se puede por tanto hacer la descomposición LU de PA

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y multiplicando por

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

obtenemos la descomposición

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que puede ser interesante para resolver sistemas, calcular determinantes, etc.

7. Considera las matrices

$$K_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcula sus determinantes y concluye cuáles de ellas son invertibles.

   b) Calcula sus valores propios y concluye cuales de ellas son definidas positivas y cuales semi-definidas positivas.

   c) Calcula, cuando sea posible, sus descomposiciones LU y Cholesky. Cuando no sea posible, explica por qué no es posible calcular dichas composiciones.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \det(K_3) &= 4 \\ \det(C_3) &= 0 \\ \det(T_3) &= 1 \\ \det(B_3) &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$K \Rightarrow \sqrt{2}+2, 2-\sqrt{2}, 2 \rightarrow \text{Definida positiva}$$

$$C \Rightarrow 0, 3, 3 \rightarrow \text{ Semidefinida positiva}$$

$$T \Rightarrow 0{,}198062264195162, 1{,}554958132087371, 3{,}246979603717467 \rightarrow \text{Definida positiva}$$

$$B \Rightarrow 1, 0, 3 \rightarrow \text{ Semidefinida positiva}$$

c) Descomposición LU

$$K_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Descomposición Cholesky

$$K_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

:

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La descomposición Cholesky no es posible para C_3 y B_3 puesto que no son definidas positivas.

8. Calcula los autovalores y autovectores de las matrices K_n, C_n, B_n y T_n.

Solución: Para cada matriz, se debe cumplir

$$K_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$C_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

En los cuatro casos las ecuaciones 2 a $n-1$, son iguales y serían de la forma

$$-x_{j-1} + 2x_j - x_{j+1} = \lambda x_j \qquad j = 2, \ldots, n-1$$

Por ser una ecuación en diferencias finitas con coeficientes constantes se prueba con soluciones de la forma $x_j = e^{ij\theta}$, entonces

$$-e^{i(j-1)\theta} + 2e^{ij\theta} - e^{i(j+1)\theta} = \lambda e^{ij\theta}$$

dividiendo por $e^{ij\theta}$ se obtiene

$$-e^{-i\theta} + 2 - e^{i\theta} = \lambda \Rightarrow -\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) + 2 = \lambda$$

y usando la definición de cos

$$-2\cos\theta + 2 = \lambda$$

luego lo valores propios de todas las matrices deben ser de la forma

$$\lambda = 2 - 2\cos\theta$$

y los vectores propios deben ser de la forma

$$x_j = \cos j\theta \quad \text{o} \quad x_j = \operatorname{sen} j\theta$$

Para encontrar los valores propios para cada matriz, así como sus vectores propios, estudiaremos cada matriz por separado, estudiado las dos ecuaciones que faltan: la primera y la última de cada matriz.

- Para K_n y soluciones de la forma $x_j = \cos j\theta$, la primera ecuación es

$$2x_1 - x_2 = \lambda x_1$$

y sustituyendo $x_1 = \cos\theta$, $x_2 = \cos 2\theta$ y $\lambda = 2 - 2\cos\theta$

$$\begin{aligned} 2\cos\theta - \cos 2\theta &= (2 - 2\cos\theta)\cos\theta \Leftrightarrow \\ 2\cos\theta - \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) &= (2 - 2\cos\theta)\cos\theta \Leftrightarrow \\ 2\cos\theta - \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta &= 2\cos\theta - 2\cos^2\theta \Leftrightarrow \\ -\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta &= -2\cos^2\theta \Leftrightarrow \\ \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta &= 0 \end{aligned}$$

que obviamente es falsa. Eso quiere decir que las soluciones deben ser de la forma $x_j = \operatorname{sen} j\theta$; vamos a comprobarlo sustituyendo ahora $x_1 = \operatorname{sen}\theta$, $x_2 = \operatorname{sen} 2\theta$ y $\lambda = 2 - 2\cos\theta$ en la primera ecuación

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta &= (2 - 2\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow \\ 2\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta &= 2\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{aligned}$$

lo que es cierto para cualquier θ.
Para determinar el valor de θ, utilizaremos la última de las ecuaciones, usando ahora que $x_j = \operatorname{sen} j\theta$ y que $\lambda = 2 - 2\cos\theta$. Dicha ecuación es

$$-x_{n-1} + 2x_n = \lambda x_n$$

por tanto

$$-\operatorname{sen}(n-1)\theta + 2\operatorname{sen} n\theta = (2 - 2\cos\theta)\operatorname{sen} n\theta$$

desarrollando el primer sumando como el seno de una diferencia $\operatorname{sen}(n-1)\theta = \operatorname{sen}(n\theta - \theta)$, se obtiene

$$\begin{aligned} -(\operatorname{sen} n\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos n\theta) + 2\operatorname{sen} n\theta &= 2\operatorname{sen} n\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen} n\theta \Leftrightarrow \\ -\operatorname{sen} n\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos n\theta &= -2\cos\theta\operatorname{sen} n\theta \Leftrightarrow \\ \cos\theta\operatorname{sen} n\theta + \operatorname{sen}\theta\cos n\theta &= 0 \end{aligned}$$

El miembro de la izquierda es el seno de una suma

$$\operatorname{sen}(n+1)\theta = 0$$

luego

$$(n+1)\theta = k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{n+1}$$

En resumen, los autovalores de K_n son

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\theta = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$$

y los autovectores

$$x^k = \left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right) = (\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}2\theta, \ldots, \operatorname{sen}n\theta) = \left(\operatorname{sen}\frac{\pi k}{n+1}, \operatorname{sen}\frac{2\pi k}{n+1}, \ldots, \operatorname{sen}\frac{nk\pi}{n+1}\right)$$

- Para C_n y soluciones de la forma $x_j = \cos j\theta$, la primera ecuación es ahora

$$2x_1 - x_2 - x_n = \lambda x_1$$

y sustituyendo x_1, x_2, x_n y λ

$$\begin{aligned}
2\cos\theta - \cos 2\theta - \cos n\theta &= (2 - 2\cos\theta)\cos\theta \Leftrightarrow \\
2\cos\theta - \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) - \cos n\theta &= (2 - 2\cos\theta)\cos\theta \Leftrightarrow \\
2\cos\theta - \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - \cos n\theta &= 2\cos\theta - 2\cos^2\theta \Leftrightarrow \\
\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - \cos n\theta &= 0 \Leftrightarrow \\
1 &= \cos n\theta \\
n\theta &= 2k\pi \Leftrightarrow \\
\theta &= \frac{2k\pi}{n}
\end{aligned}$$

Utilizaremos la última de las ecuaciones, usando que $x_j = \cos j\theta$ y que $\lambda = 2 - 2\cos\theta$, para este valor de θ :

$$-x_1 - x_{n-1} + 2x_n = \lambda x_n \Longrightarrow \cos\theta - \cos(n-1)\theta + 2\cos n\theta = (2 - 2\cos\theta)\cos n\theta$$

desarrollando

$$\begin{aligned}
-\cos\theta - (\cos n\theta\cos\theta + \operatorname{sen}n\theta\operatorname{sen}\theta) + 2\cos n\theta &= 2\cos n\theta - 2\cos\theta\cos n\theta \Leftrightarrow \\
-\cos\theta - \cos n\theta\cos\theta - \operatorname{sen}n\theta\operatorname{sen}\theta &= -2\cos\theta\cos n\theta \Leftrightarrow \\
-\cos\theta + \cos n\theta\cos\theta - \operatorname{sen}n\theta\operatorname{sen}\theta &= 0 \Leftrightarrow \\
-\cos\theta + \cos(n+1)\theta &= 0 \Leftrightarrow \\
\cos(n+1)\theta &= \cos\theta
\end{aligned}$$

para $\theta = \frac{2k\pi}{n}$

$$\cos\left(n+1\right)\theta = \cos\left(n+1\right)\frac{2k\pi}{n} = \cos\left(2k\pi + \frac{k\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cos\theta$$

por tanto la igualdad es cierta y tenemos como valores propios

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}$$

y como valores propios

$$x^k = \left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right) = (\cos\theta, \cos 2\theta, \ldots, \cos n\theta) = \left(\cos\frac{2k\pi}{n}, \cos\frac{4k\pi}{n}, \ldots, \cos\frac{2nk\pi}{n}\right)$$

vectores propios asociados a cada λ_k.
Probemos ahora con soluciones de la forma $x_j = \operatorname{sen} j\theta$. Para la primera ecuación

$$2x_1 - x_2 - x_n = \lambda x_1$$

vamos a comprobarlo sustituyendo $x_1 = \operatorname{sen}\theta$, $x_2 = \operatorname{sen} 2\theta$ y $\lambda = 2 - 2\cos\theta$

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta - \operatorname{sen} n\theta &= (2 - 2\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow \\
2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta - \operatorname{sen} n\theta &= 2\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \Leftrightarrow \\
-\operatorname{sen} n\theta &= 0 \Leftrightarrow \\
n\theta &= k\pi \Leftrightarrow \\
\theta &= \frac{k\pi}{n}
\end{aligned}$$

Y para la última de las ecuaciones $-x_1 - x_{n-1} + 2x_n = \lambda x_n$

$$-\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\left(n-1\right)\theta + 2\operatorname{sen} n\theta = (2 - 2\cos\theta)\operatorname{sen} n\theta$$

desarrollando

$$\begin{aligned}
-\operatorname{sen}\theta - (\operatorname{sen} n\theta\cos\theta - \cos n\theta\operatorname{sen}\theta) + 2\operatorname{sen} n\theta &= 2\operatorname{sen} n\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen} n\theta \Leftrightarrow \\
-\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} n\theta\cos\theta + \cos n\theta\operatorname{sen}\theta &= -2\cos\theta\operatorname{sen} n\theta \Leftrightarrow \\
-\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} n\theta\cos\theta + \cos n\theta\operatorname{sen}\theta &= 0 \Leftrightarrow \\
-\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\left(n+1\right)\theta &= 0 \Leftrightarrow \\
\operatorname{sen}\left(n+1\right)\theta &= \operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

Para el valor de $\theta = \frac{j\pi}{n}$ encontrado

$$\operatorname{sen}(n+1)\frac{j\pi}{n} = \operatorname{sen}\frac{j\pi}{n}$$

pero

$$\operatorname{sen}(n+1)\frac{j\pi}{n} = \operatorname{sen}\left(j\pi + \frac{j\pi}{n}\right) = \operatorname{sen} j\pi \cos\frac{j\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{j\pi}{n}\cos j\pi = (-1)^j \operatorname{sen}\frac{j\pi}{n}$$

que sólo coincide con el anterior cuando j es un número par, es decir, de la forma $j = 2k$ y por tanto $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ como antes. Por tanto para el valor propio $\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}$, también tenemos como vectores propios

$$x^k = \left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right) = (\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}2\theta, \ldots, \operatorname{sen}n\theta) = \left(\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}, \operatorname{sen}\frac{4k\pi}{n}, \ldots, \operatorname{sen}\frac{2nk\pi}{n}\right)$$

- Para T_n y soluciones de la forma $x_j = \cos j\theta$, la primera ecuación es

$$x_1 - x_2 = \lambda x_1$$

y sustituyendo $x_1 = \cos\theta$, $x_2 = \cos 2\theta$ y $\lambda = 2 - 2\cos\theta$

$$\begin{aligned}
\cos\theta - \cos 2\theta &= (2 - 2\cos\theta)\cos\theta \Leftrightarrow \\
\cos\theta - \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) &= (2 - 2\cos\theta)\cos\theta \Leftrightarrow \\
\cos\theta - \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta &= 2\cos\theta - 2\cos^2\theta \Leftrightarrow \\
-\cos\theta - \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta &= -2\cos^2\theta \Leftrightarrow \\
\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - \cos\theta &= 0 \Leftrightarrow \\
1 - \cos\theta &= 0 \Leftrightarrow \\
2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{\theta}{2} &= k\pi \Leftrightarrow \\
\theta &= 2k\pi
\end{aligned}$$

que obviamente es falsa. Eso quiere decir que las soluciones deben ser de la forma $x_j = \operatorname{sen} j\theta$; vamos a comprobarlo sustituyendo ahora $x_1 = \operatorname{sen}\theta$, $x_2 = \operatorname{sen}2\theta$ y $\lambda = 2 - 2\cos\theta$ en la primera ecuación

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta &= (2 - 2\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow \\
2\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta &= 2\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

lo que es cierto para cualquier θ.

Para determinar el valor de θ, utilizaremos la última de las ecuaciones, usando ahora que $x_j = \operatorname{sen} j\theta$ y que $\lambda = 2 - 2\cos\theta$. Dicha ecuación es

$$-x_{n-1} + 2x_n = \lambda x_n$$

por tanto

$$-\operatorname{sen}(n-1)\,\theta + 2\operatorname{sen} n\theta = (2 - 2\cos\theta)\operatorname{sen} n\theta$$

desarrollando el primer sumando como el seno de una diferencia $\operatorname{sen}(n-1)\,\theta = \operatorname{sen}(n\theta - \theta)$, se obtiene

$$\begin{aligned} -(\operatorname{sen} n\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos n\theta) + 2\operatorname{sen} n\theta &= 2\operatorname{sen} n\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen} n\theta \Leftrightarrow \\ -\operatorname{sen} n\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos n\theta &= -2\cos\theta\operatorname{sen} n\theta \Leftrightarrow \\ \cos\theta\operatorname{sen} n\theta + \operatorname{sen}\theta\cos n\theta &= 0 \end{aligned}$$

El miembro de la izquierda es el seno de una suma

$$\operatorname{sen}(n+1)\,\theta = 0$$

luego

$$(n+1)\,\theta = k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{n+1}$$

En resumen, los autovalores de K_n son

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\theta = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$$

y los autovectores

$$x^k = \left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right) = (\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}2\theta, \ldots, \operatorname{sen} n\theta) = \left(\operatorname{sen}\frac{\pi k}{n+1}, \operatorname{sen}\frac{2\pi k}{n+1}, \ldots, \operatorname{sen}\frac{nk\pi}{n+1}\right)$$

9. Teniendo en cuenta que los autovalores de la matriz K_n son $\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, deduce que el número de condicionamiento de K_n es aproximadamente $\frac{4}{\pi^2}\,(n+1)^2$.

10. Explica cómo, a partir de la factorización $A = LU$, se calcula el determinante de A. Como aplicación, calcula el determinante de K_n (*).

11. Sea A una matriz con número de condicionamiento $c(A) = 100$. Supongamos que el error porcentual cometido al calcular el término independiente b en el sistema $Ax = b$ es del 10 %. Calcula una estimación

    del error porcentual en la solución x.

12. Consideremos la matriz

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcula las matrices de iteración M_J y M_{GS}, respectivamente de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Calcula los radios espectrales de dichas matrices y comprueba que $\rho_{GS} = \rho_J^2$.

13. Calcula una estimación del radio espectral de la matriz $M_n = I_n - \frac{1}{2}K_n$ que aparece al aplicar el método de Jacobi a la matriz K_n.

14. (OCTAVE) Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejecuta en Octave las siguientes instrucciones: `x=rand(3,1); z = x/norm(x);` que genera un vector aleatorio unitario y de 3 componentes. Finalmente repetimos 15 veces las siguientes órdenes: `y=A*z; [zm, j] = max(abs(z)); lambda=y(j)/z(j); z=y/norm(y); lambda`

Comprueba que lo calculado es una aproximación al autovalor dominante (el mayor) de A y de su autovector asociado.

Este método, que se ha de describir en forma algorítmica, se conoce con el nombre de Método de la Potencia. Es el método que usa (o usaba) el algoritmo PageRank de Google para ordenar las páginas web de una búsqueda por internet.