Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales
Cálculo Numérico
Problemas Temas 3
Resolución de Ecuaciones y sistemas no lineales

1. Construye un método iterativo (tipo Newton-Raphson) que permita calcular la raíz de índice r de cualquier número real positivo.

2. Realiza un algoritmo que calcule el inverso de un número sin realizar la división, aplicando el método de Newton-Raphson.

3. Prueba que las siguientes funciones

   a) $f(x) = x - (x^3 + 4x^2 - 10)$ b) $g(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$ c) $h(x) = \frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{1/2}$

   tienen como punto fijo una solución de

   $$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

   pero sólo uno de ellos converge. ¿Qué ocurre?

4. (**Método de Horner**) Sea un polinomio

   $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

   Si definimos $b_n = a_n$, y $b_k = a_k + b_{k+1}x_0$ para $k = n-1, \ldots, 0$. Demuestra entonces que $b_0 = P(x_0)$. Además si $Q(x)$ es el polinomio

   $$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$$

   entonces se verifica

   $$P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x) + b_0$$

   Utiliza este método y el método de Newton para calcular los ceros de un polinomio. Aplica el método de Horner para encontrar las raíces de:

   a) $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 5, x \in [-2, -1{,}5] x_0 = -2$

   b) $P\left(x\right) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

   c) $P\left(x\right) = x^3 - x - 1$

5. Resuelve utilizando el método de iteración de punto fijo:

   a) $e^{-x} - x = 0$ b) $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

6. Resuelve las siguentes ecuaciones por el método de bipartición, determinando con anterioridad el número de iteraciones necesarias:

   a) $x = \tan x$ en $[4, 4{,}5]$ $error < 10^{-2}$ b) $e^x = 3x$ en $[0, 1]$ $error < 10^{-4}$

7. Compara los métodos de bisección y regula falsi para encontrar una raíz de

$$f(x) = x^{10} - 1$$

   en el intervalo $[0, 1{,}3]$ con un error prefijado ε. Razona los resultados obtenidos.

8. Partiendo del punto $x_0 = 0$, aplica el método de Newton-Raphson a la función

$$f(x) = x^2 + 2xe^x + e^{2x}$$

   ¿Converge hacia algún punto?

9. Aplica los métodos de la secante y de la regula falsi a la función:

$$f(x) = \log(x)$$

   sobre el intervalo $[0{,}5, 5]$. Interpreta los resultados obtenidos.

10. Calcula en el intervalo $[0, \pi/2]$, la solución de la ecuación

$$x = \cos(x)$$

11. Resuelve, utilizando los métodos de bisección, Newton-Raphson y secante para las siguientes ecuaciones, y un error $\varepsilon < 10^{-3}$

    a) $3x + \operatorname{sen}(x) - e^x = 0$ b) $x - 2^{-x} = 0$
    c) $\cos(x) = x$ d) $x^5 + 2x = 4$

12. Tomando como valor inicial $0{,}5$, resuelve por Newton-Raphson la ecuación

$$x^{10} = 1$$

13. Con el fin de eliminar la concentración de bacterias en un lago se añade al agua un bactericida, produciéndose un descenso de la concentración c (millones) según la expresión

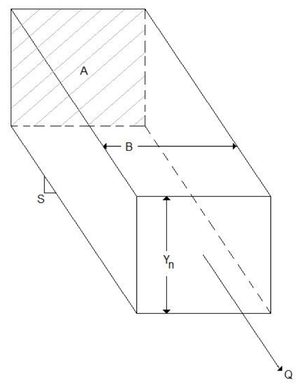
$$c(t) = 80e^{-2t} + 20e^{-0{,}5t} \text{ con } t \text{ expresado en horas}$$

    Por cuestiones biológicas, la concentración no debe ser inferior a 7. Determina, utilizando el método de Newton-Raphson, cuánto tiempo debe actuar el bactericida.

14. El movimiento de una estructura, se define mediante la siguiente ecuación para una oscilación amortiguada:

$$y(t) = 10 + e^{-kt}\cos(wt), \text{ donde } k = 2 \text{ y } w = 2$$

    a) Estima en que instante se obtiene $y = 0$, con un error $\varepsilon < 0{,}01$.
    b) Repite el apartado anterior utilizando el método de la secante.



15. La figura siguiente muestra un canal abierto de dimensiones constantes con un área transversal A.

    Bajo condiciones de flujo uniforme, se cumple la siguiente relación basada en la ecuación de Manning (Ingeniería de fluidos):

$$Q = \frac{Y_n B}{n} \left(\frac{Y_n B}{B + 2Y_n} \right)^{23} S^{1/2}$$

    donde Q, es el flujo, Y_n es la profundidad normal, B es el ancho de canal, n es un coeficiente de rugosidad y S es la pendiente del canal. Si este valor es menor que la profundidad crítica

$$Y_c = \left(\frac{Q^2}{B^2 g} \right)^{13}, (g = 9{,}8\ m/s^2)$$

    entonces el flujo se dice que es subcrítico.

    Utilizando el método de bisección determinar el valor de Y_n si $Q = 14{,}15\ m^3/s; B = 4{,}572\ m; n = 0{,}017$ y $S = 0{,}00015$ e indicar si el flujo es subcrítico o no.

16. Consideremos el problema de programación no lineal (optimización)

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{sujeto a} & \\ & h(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

    Para resolverlo debemos resolver el sistema alternativo

$$\text{(KKT)} \left\{ \begin{array}{c} \nabla f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ h(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

    que en general es un sistema no lineal en las incógnitas (x, λ). Consideremos el caso particular

$$\begin{array}{rcl} f(x_1, x_2, x_3) & = & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 5)^2 \\ h(x_1, x_2, x_3) & = & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{array}$$

    Escribe las ecuaciones para este caso y explica cómo se resolvería dicho sistema usando el método de Newton. Se ha de calcular de manera explícita la matriz Jacobiana del método de Newton.

17. Resuelve mediante los métodos de punto fijo y Newton-Raphson

$$\left\{ \begin{array}{c} 4x^2 - y^2 = 0 \\ 4xy - x - 1 = 0 \end{array} \right.$$

18. La ecuación

$$x = ax - ax^2, \qquad a > 0$$

tiene dos soluciones: $x^* = 0$ y $x^* = \frac{a-1}{a}$. Se pide:

a) Explica cómo se aproximan numéricamente dichas soluciones usando el método de punto fijo.

b) Implementa dicho algoritmo en OCTAVE y comprueba que tomando como inicialización $0 < x_0 < 1$, se tiene:

1) Si $0 \leq a < 1$, las iteraciones convergen a $x^* = 0$.
2) Si $1 < a < 3$, las iteraciones covergen a $x^* = \frac{a-1}{a}$.
3) Si $3 < a \leq 4$, las iteraciones no convergen, pero tampoco divergen.
