1. Considera el siguiente problema de condiciones de contorno:

$$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) + u(t) = -t^2 & t \in [0,4] \\ u(0) = 3 \\ u(4) = 0 \end{cases}$$

Utiliza diferencias finitas centradas para aproximar $u''(t)$ y $u'(t)$. Considera una discretización de $[0,4]$ en 4 subintervalos de la misma longitud y calcula la solución numérica del problema.

2. Considera el siguiente problema de condiciones de contorno:

$$\begin{cases} u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = -\operatorname{sen} t & t \in [0,2] \\ u(0) = 3 \\ u(2) = 0 \end{cases}$$

Utiliza diferencias finitas centradas para aproximar $u''(t)$ y diferencias finitas progresivas para $u'(t)$. Considera una discretización de $[0,2]$ en 4 subintervalos de la misma longitud y calcula la solución numérica del problema.

3. Dada la ecuación del calor:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & x \in [0,4] \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 3 \\ u(4,t) = 0 \\ u(x,0) = 3\left(1 - \dfrac{x}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{4}\right) \end{cases}$$

   a) Considerando una discretización de $x \in [0,4]$ en 4 subintervalos de la misma longitud y 3 intervalos de tiempo equidistantes, separados Δt:

   b) Determina el valor de Δt para que la discretización resultante sea estable si utilizáramos el método explícito de Euler.

   c) Calcula el resultado numérico del problema utilizando el método explícito de Euler.

   d) Para cada instante de tiempo, calcula el flujo de calor $q(x)$ en $x = 0$ y en , saibendo que el mismo se calcula como

$$q(x) = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

   Utiliza para ello la aproximación numérica que estimes oportuna.

   e) Calcula una aproximación numérica de la temperatura media de la barra en cada instante de tiempo t^*, sabiendo que la misma se calcula como sigue:

$$\overline{u} = \frac{\displaystyle\int_0^L u(x,t^*)\,dx}{L}$$

Utiliza para ello la estrategia que consideres más oportuna.

f) Utilizando la misma discretización espacial y temporal, obtén una aproximación numérica por medio del método de Euler implícito.

4. Dada la ecuación del calor:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - 3u(x,t) \qquad x \in [0,4] \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 1 \\ u(4,t) = 1 \\ u(x,0) = 1 + x(4-x) \end{cases}$$

a) Considera una discretización de $x \in [0,4]$ en 4 subintervalos de la misma longitud y 3 intervalos de tiempo en $[0,1]$.

b) Determina si la discretización anterior es estable.

c) Utilizando la misma discretización espacial y temporal, obtén una aproximación numérica por medio del método de Euler implícito.

5. Dada la ecuación del calor:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - 3u^2(x,t) \qquad x \in [0,4] \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 1 \\ u(4,t) = 1 \\ u(x,0) = 1 + x(4-x) \end{cases}$$

a) Considera una discretización de $x \in [0,4]$ en 4 subintervalos de la misma longitud y 3 intervalos de tiempo en $[0,1]$.

b) Calcula el resultado numérico del problema utilizando el método de Euler explícito.

c) Determina si la discretización anterior es estable.

d) Explica cómo resolverías en cada instante de tiempo la solución numérica por medio del método implícito de Euler.