Capítulo 1

Conceptos previos. Teoría de conjuntos y estructuras algebráicas

1.1. Notación matemática

En este apartado vamos a introducir algunos elementos de la simbología y lenguaje matemático que vamos a emplear. En la siguiente tabla se incluyen los más usados

Símbolo	**Se lee**	**Significado**
$\forall$	Para todo	Una propiedad es válida para todos los elementos
$\exists$	Existe	Existe un elemento que cumple una propiedad
$\nexists$	No existe	No existe ningún elemento que cumpla una propiedad
$\exists^{\circ}$	Existe un único	Hay un y sólo un elemento que cumple una propiedad
$/$ $\vert$ $:$	Tal que	Tal que
$p \Longrightarrow q$ $q \Longleftarrow p$	p implica q	Si p es cierto entonces q también Significa que si la condición de la izquierda se cumple, entonces también se cumple la de la derecha. Se dice que p es v *condición suficiente* para q, mientras que q es necesaria para p.
$p \Longleftrightarrow q$	p si y sólo si q	Se cumple p sí y sólo sí se cumple q. Las propiedades p y q son equivalentes. p es condición necesaria y suficiente para q y viceversa
$\vee$	o	Conjunción disyuntiva o
$\wedge$	y	Conjunción copulativa y
$\sum$	Sumatorio	Suma los términos indicados $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$\prod$	Productorio	Hace el producto de los términos indicados $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$

1.2. Conjuntos

Definición 1.1 *Un* conjunto *es la reunión en un todo de determinados objetos diferenciables unos de otros.*

Los objetos que forman el conjunto se llaman elementos.

Se utilizará el símbolo $\{\}$ para definir conjuntos, y se suelen nombrar o representar mediante letras mayúsculas: $A, B, \ldots$, mientras que los elementos se representan mediante letras minúsculas: $a, b, \ldots$

Los conjuntos pueden definirse enumerando sus elementos o indicando una propiedad que cumplan todos ellos:

1. *Extensiva o por extensión:* Listando o enumerando todos sus elementos.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

2. *Intensiva o por comprensión:* Indicando una propiedad compartida por todos los elementos.

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Puntuaciones obtenidas al tirar un dado}\} \\ B &= \{\text{Vocales del idioma español}\} \\ C &= \{\text{Números naturales pares}\} \end{aligned}$$

Para indicar que un elemento está en un conjunto, usaremos el símbolo $\in$, y diremos que el elemento *pertenece al conjunto*, así

$$1 \in A,$$

mientras que el símbolo $\notin$ se usará para indicar que el elemento no está en el cojunto, por ejemplo

$$7 \notin A,$$

y diremos que 7 *no pertenece al conjunto* A.

Definición 1.2 *El* cardinal *de un conjunto es el número de elementos que tiene y se expresará con el símbolo #, delante del nombre del conjunto.*

El conjunto es finito *si tiene una cantidad finita de elemntos, mientras que es* infinito *si tiene una cantidad infinita de elementos. Si el conjunto no tiene elementos, se dice que es el conjunto vacío y se expresa como* $\emptyset$.

Ejemplo 1.1

$$\begin{aligned} \#A &= 6 \\ \#B &= 5 \\ \#C &= \infty \end{aligned}$$

Observación 1.1 *El símbolo # al final de una demostración, ejercicio o resultado significa que se ha alcanzado una çontradicción.º reducción al absurdo".*

Definición 1.3 *Sean A y B dos conjuntos. Diremos que B es* subconjunto de A *(o B* está incluido *en A), si y sólo si, todos los elementos del conjunto B están en A, y se denota como*

$$B \subseteq A$$

En notación matemática la definición anterior se puede expresar como:

$$(B \subseteq A) \Longleftrightarrow (\forall b \in B \Longrightarrow b \in A)$$

En lo sucesivo trataremos de expresar todos los resultados con la notación matemática.

Observación 1.2 *Además del símbolo $\subseteq$ se suelen utilizar los siguientes*

$$A \supseteq B \Longleftrightarrow B \subseteq A$$

en este caso se dice que A incluye a B y es equivalente a decir que B está incluido en A.

También es posible usar

$$B \subset A, B \subsetneq A, B \subsetneqq A,$$

y en este caso significa que B está incluido en A, pero no es igual, es lo que denominamos subconjunto propio de A*, notar que siempre ocurre $A \subseteq A$ y por tanto cada conjunto es subconjunto de sí mismo.*

Para indicar que un conjunto no es subconjunto de otro usaremos

$$B \nsubseteq A$$

y se lee B no está incluido en A, o B no es subconjunto de A.

Definición 1.4 *Dos conjuntos A y B son* iguales *si tienen los mismos elementos, es decir*

$$A = B \Longleftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

o también se puede expresar como

$$(A \subseteq B) \Longleftrightarrow (\forall b \in B \Longrightarrow b \in A) \wedge (\forall a \in A \Longrightarrow a \in B)$$

Definición 1.5 *Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, definimos:*

1. Unión: *Elementos que pertenecen a A y a la B*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

2. Intersección: *Elementos que están en A y B a la vez*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

3. Diferencia: *Elementos que están en A, pero no en B*

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

también se usa $A \backslash B$.

4. Producto cartesiano: *El conjunto de pares que se pueden formar tomando el primer elemento en A y el segundo en el conjunto B*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Esta definición se puede extender a tres o más conjuntos

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_k \in A_k; k = 1, \ldots, n\}$$

También puede utilizarse un único conjunto

$$A \times A = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$$

aunque en este caso es más sencillo poner

$$A^2$$

y para cualquier número natural

$$A^n = A \times \cdots \times A = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_k \in A; k = 1, \ldots, n\}$$

el elemento $(a_1, \ldots, a_n)$ *se denomina* $n-$*upla.*

Ejemplo 1.2 *Sean los conjuntos*

$$A = \{1, 2, 3\} \ \text{ y } B = \{2, 4, 6\}$$

tendremos

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 6\} \\ A \cap B &= \{2\} \\ A - B &= \{1, 3\} \\ B - A &= \{4, 6\} \\ A \times B &= \{(1,2)\,;(1,4)\,;(1,6)\,;(2,2)\,;(2,4)\,,(2,6)\,;(3,2)\,;(3,4)\,,(3,6)\} \\ B \times A &= \{(2,1)\,;(2,2)\,;(2,3)\,;(4,1)\,;(4,2)\,,(4,3)\,;(6,1)\,;(6,2)\,,(6,3)\} \end{aligned}$$

Notar que

$$A \times B \neq B \times A$$

1.2.1. Conjuntos numéricos destacables

A continuación indicamos la notación empleada para los diferentes conjuntos numéricos que vamos a emplear:

1. *Números naturales:* $\mathbb{N}$
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\},$$
en algunos textos el número 0 se excluye de los números naturales, en este curso usaremos la siguiente notación
$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}.$$

2. *Números enteros:* $\mathbb{Z}$
$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots\}.$$
Notar que
$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}.$$

3. *Números racionales:* $\mathbb{Q}$
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}; n \neq 0 \right\}.$$
Notar que
$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q},$$
simplemente tomamos $n = 1$.

   Los números racionales tienen dos representaciones en forma de fracción o como decimal periódico. (Nota: hay que conocer cómo pasar de una forma a la otra),

4. *Números reales:* $\mathbb{R}$. La definición formal de número real es demasiado compleja para expresarla aquí, ya que los elementos no se pueden poner en sucesión como una secuencia, serían los decimales periódicos y los no periódicos con infinitos decimales $(\sqrt{2}, \pi, e)$. Notar que

$$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R},$$

Los números reales que no son racionales se denominan *irracionales* y se representan por

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

Para los números reales se puede establecer la llamada *ley de orden total:* Dados dos números reales cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, entonces o son iguales, o uno de ellos es mayor que el otro, es decir,

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow \{x \geq y\} \vee \{y \geq x\}$$

Esta relación cumple una serie de propiedades que recordamos aquí $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \{x \geq y\} \wedge \{y \geq z\} \Longrightarrow \{x \geq z\} \\ \text{ii)} & \{x \geq y\} \wedge \{y \geq x\} \Longrightarrow x = y \\ \text{iii)} & \{x \geq y\} \Longrightarrow \{x + z\} \geq \{y + z\} \\ \text{iv)} & \{x \geq y\} \wedge \{z \geq 0\} \Longrightarrow x \cdot z \geq y \cdot z \end{array}$$

Otros conjuntos relacionados con los números reales:

$$\mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\mathbb{R}^{-} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

Notar que el 0 no está en ninguno de los dos conjuntos.

5. *Números complejos:* Los veremos con más detalle en el próximo tema, aunque adelantamos aquí su definición

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 1.3 *Expresa los siguientes números racionales periódicos en forma fraccional*

$$4{,}25 \longrightarrow 4{,}25 \times 100 = 425 \Longrightarrow 4{,}25 = \frac{425}{100} = \frac{17}{4}$$

$$\begin{aligned} 4.\widehat{25} &= 4{,}25252525 \rightarrow 4.\widehat{25} \times 100 = 425.\widehat{25} \Rightarrow 425.\widehat{25} - 4.\widehat{25} = 421 \Rightarrow \\ 4.\widehat{25} \times 100 - 4.\widehat{25} &= 421 \Leftrightarrow 4.\widehat{25}\,(100 - 1) = 421 \Leftrightarrow 4.\widehat{25} = \frac{421}{99} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4{,}23\widehat{25} &= 4{,}2325252525 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4{,}23\widehat{25} \times 100 = 423.\widehat{25} \\ 4{,}23\widehat{25} \times 10000 = 42325.\widehat{25} \end{array} \right\} \Rightarrow 42325.\widehat{25} - 423.\widehat{25} = 41902 \\ 42325.\widehat{25} - 423.\widehat{25} &= 4{,}23\widehat{25} \times 10000 - 4{,}23\widehat{25} \times 100 \Leftrightarrow 4{,}23\widehat{25}\,(10000 - 100) = 41902 \\ &\Leftrightarrow \; 4{,}23\widehat{25} = \frac{41902}{10000 - 100} = \frac{20\,951}{4950} \end{aligned}$$

1.3. Aplicaciones

Definición 1.6 *Dados dos conjuntos A y B, una aplicación de A hacia B (o de A en B) es una forma de asignar a cada elemento del conjunto A un y sólo un elemento de B y se escribe usando en general letras minúsculas de la forma*

$$f : A \longrightarrow B,$$

o bien de la forma

$$A \xrightarrow{f} B.$$

El conjunto A es el conjunto inicial o dominio de f, *mientras que B es el* conjunto final o codominio de f.

Definición 1.7 *Si $a \in A$, el elemento de B que le asignamos usando la aplicación f se llama* imagen de a *por f y se denota por $f(a)$.*

Podemos poner por tanto que en una aplicación $f : A \longrightarrow B$, se cumple

$$\forall a \in A \Longrightarrow \exists^{\circ} b \in B : f(a) = b$$

y también se puede expresar como:

$$a = f^{-1}(b).$$

Llamamos imagen de f, *al conjunto*

$$\begin{aligned} f(A) &= \operatorname{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \\ &= \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\} \end{aligned}$$

es el conjunto de todas las imágenes de los elementos de A, usando la aplicación f.

Una función *es una aplicación entre conjuntos y/o subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.*

Ejemplo 1.4

$$f : \{1, 2, 4, 6\} \longrightarrow \{2, 4, 6{,}8{,}9\}$$

con

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 \\ f(2) &= 9 \\ f(4) &= 9 \\ f(6) &= 8 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con

$$f(x) = x^2 + 5.$$

Ejemplo 1.6

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

con

$$f(x, y) = x - y.$$

Definición 1.8 *Dada un conjunto cualquiera A, definimos la aplicación identidad sobre A a la aplicación*

$$I : A \longrightarrow A$$

definida como

$$I_A(a) = a; \qquad \forall a \in A$$

es decir, es una aplicación del conjunto A sobre sí mismo, tal que a cada elemento de A, le asocia ese mismo elemento.

Definición 1.9 *Dado A y B y sea $f : A \longrightarrow B$, si $A' \subseteq A$, la imagen de A' por f es el conjunto de las imágenes de los elementos de A'*

$$f\left(A'\right) = \{f(a) \mid a \in A\} = \left\{b \in B \mid \exists a \in A'; f(a) = b\right\}$$

Sea $B' \subseteq B$, llamamos antiimagen o imagen inversa de *B' al conjunto de A definido por*

$$f^{-1}\left(B'\right) = \left\{a \in A \mid f(a) \in B'\right\}$$

es decir, es el conjunto de los elementos de A que tienen como imagen un elemento de B'. Básicamente

$$a \in f^{-1}\left(B'\right) \Longleftrightarrow \exists b \in B' : f(a) = b$$

Ejemplo 1.7

$$f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{2, 4, 6, 8\}$$

con

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 \\ f(2) &= 2 \\ f(3) &= 8 \end{aligned}$$

en este caso

$$\mathrm{Im}(f) = \{2, 4, 8\}$$

está claro que

$$6 \notin \mathrm{Im}(f)$$

Sea $A' = \{2, 3\}$ y $B' = \{2, 4\}$, entonces

$$f\left(A'\right) = \{f(2), f(3)\} = \{2, 8\}$$

$$f^{-1}\left(B'\right) = \left\{f^{-1}(2), f^{-1}(4)\right\} = \{2, 1\}$$

1.3.1. Tipos de aplicaciones

Definición 1.10 *Sea $f : A \longrightarrow B$. f es* inyectiva *$\Longleftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A$ con $f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2$.*

Definición 1.11 *Sea $f : A \longrightarrow B$. f es* sobreyectiva o suprayectiva *$\Longleftrightarrow f(A) = B$.*
Esta definición implica que para cualquier $b \in B$, $\exists a \in A : f(a) = b$.

Definición 1.12 *Sea $f : A \longrightarrow B$. f es* biyectiva *$\Longleftrightarrow f$ es inyectiva y sobreyectiva a la vez.*

Ejemplo 1.8

$$f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b, c, o\}$$

con $f(1) = a$, $f(2) = c$ *y* $f(3) = 0$, *es una aplicación inyectiva, pero no sobreyectiva; por tanto tampoco es sobreyectiva.*

Ejemplo 1.9

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $f(x) = 2x + 1$. *Vamos a comprobar que es inyectiva, suponiendo para ello que dados dos números reales* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *con* $f(x_1) = f(x_2)$, *por la definición*

$$f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$$

ya haciendo operaciones vemos que

$$x_1 = x_2$$

y por tanto es inyectiva.

Para comprobar que es sobreyectiva, dado un $y \in \mathbb{R}$, *tenemos que encontrar un valor* $x \in \mathbb{R}$, *tal que* $y = f(x)$, *es decir,*

$$y = 2x + 1$$

y podemos despejar x *en función de* y

$$x = \frac{1}{2}(y - 1) \in \mathbb{R},$$

por tanto es sobreyectiva.

Ejemplo 1.10

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $f(x) = x^2$. *No es inyectiva puesto que*

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 = 1 \\ f(-1) &= (-1)^2 = 1 \end{aligned}$$

Tampoco es sobreyectiva, puesto que como $f(x) \geq 0$, *no podemos encontrar ningún número real tal que*

$$f(x) = -1.$$

Ejemplo 1.11

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

con $g(x) = x^2$. *No es inyectiva, aunque sí es sobreyectiva.*

Ejemplo 1.12

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

con $h(x) = e^x$. *Es inyectiva y sobreyectiva.*

Ejemplo 1.13

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

con $h(x) = \ln(x)$. *Es inyectiva y sobreyectiva.*

1.3.2. Composición de aplicaciones

Definición 1.13 *Sean A, B y C, tres conjuntos cualesquiera. Sean f, g dos aplicaciones definidas como*

$$f : A \longrightarrow B$$

y

$$g : B \longrightarrow C$$

Podemos definir una nueva aplicación de A en C, que se denomina composición de aplicaciones *y se expresa como*

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & A & \longrightarrow & B & \\ h & \searrow & & \swarrow & g \\ & & C & & \end{array}$$

con

$$h = g \circ f$$

que se define como sigue: Dado $a \in A$ con $b = f(a) \in B$, como $b \in B$ entonces $g(b) = c \in C$, definimos $h(a) = c$, es decir,

$$h(a) = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

La nueva aplicación es la composición de f y g. o g compuesta con f.

Ejemplo 1.14 *Sea*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $f(x) = 3x^2$ y

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $g(x) = 2x - 1$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 1 = 2\left(3x^2\right) - 1 = 6x^2 - 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3(g(x))^2 = 3(2x-1)^2 = 12x^2 - 12x + 3$$

Con el ejemplo anterior vemos claramente que la composición de aplicaciones no es, en general, conmutativa.

Una función se puede componer consigo misma

$$f \circ f = f^2$$

para evitar confusiones con el cuadrado de una función, usaremos la notación $[f(x)]^2$ en este caso, de este modo si $f(x) = e^x$, tendremos

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = e^{f(x)} = e^{e^x}$$

$$[f(x)]^2 = f(x) \cdot f(x) = e^x \cdot e^x = e^{2x}$$

1.3.3. Aplicación inversa

Definición 1.14 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación biyectiva. Eso quiere decir que $\forall b \in B : \exists^{\circ} a \in A$ tal que $f(a) = b$ y por tanto $f^{-1}(b) = a$. Definimos*

$$g : B \longrightarrow A$$

como

$$g(b) = f^{-1}(a)$$

la aplicación $g = f^{-1}$ es la aplicación inversa.

Aunque es similar, no se trata del cálculo de antiimágenes, sino de la definición de una nueva función.

Se cumple

$$f \circ f^{-1} = I_A$$

$$f^{-1} \circ f = I_B$$

Ejemplo 1.15 *Las siguientes son ejemplos de funciones y sus inversas*

1. $$f(x) = 2x + 1 \qquad f^{-1}(x) = \tfrac{x-1}{2}$$

2. $$f(x) = x^2 \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x} : \forall x > 0$$

3. $$f(x) = e^x \qquad f^{-1}(y) = \ln x : \forall x > 0$$

4. $$f(x) = \sin x \qquad f^{-1}(y) = \arcsin x : x \in [-1, 1]$$

1.4. Leyes de composición

Definición 1.15 *Dado un conjunto A, una* ley de composición interna (LCI) *es una aplicación del producto cartesiano $A \times A$ en A*

$$f : A \times A \longrightarrow A$$

Es una operación entre dos elementos de A, que nos da otro elemento de A. Generalmente la LCI se representa mediante un operador en lugar de un nombre de la función.

Ejemplo 1.16 *Suma y producto sobre los números naturales son dos leyes de composición interna.*

$$+ : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \Rightarrow +(m, n) = m + n$$

$$* : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \Rightarrow *(m, n) = m * n$$

Ejemplo 1.17 *La resta de números naturales no es una ley de composición interna, puesto que si $m < n$ entonces $m - n \notin \mathbb{N}$.*

Definición 1.16 *Dados dos conjuntos A y B. Una ley de composición externa (LCE) es una aplicación de $B \times A$ en A*

$$g : B \times A \longrightarrow A$$

Es una operación entre un elemento de B y otro elemento de A, que nos da otro elemento de A. Generalmente la LCE también se representa mediante un operador. Los elementos de B son los llamados escalares.

Ejemplo 1.18 *Producto de un real por un punto del plano.*

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow *(\lambda, (a, b)) = (\lambda a, \lambda b)$$

1.5. Grupos, cuerpos, anillos: estructuras algebráicas.

Definición 1.17 *Llamamos* grupo *al par formado por un conjunto G y una LCI (suma), que cumple las siguientes propiedades:*

1. *Asociativa:* $\forall a, b, c \in G \Longrightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$
2. *Elemento Neutro:* $\exists 0 \in G : \forall a \in G \Longrightarrow (a + 0) = (0 + a) = a$
3. *Elementos Opuestos:* $\forall a \in G \Longrightarrow \exists b \in G : (a + b) = 0$.

   El elemento opuesto, que también se denomina simétrico, *se suele poner como $b = -a$.*

El grupo $(G, +)$ se dice *abeliano o conmutativo, si se cumple la propiedad conmutativa:*

$$\forall a, b \in G : a + b = b + a$$

Ejemplo 1.19 $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}, \cdot)$, *Matrices con su suma. Los conjuntos $(\mathbb{N}, +)$ y $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no son grupos.*

Definición 1.18 *Llamamos* anillo *a la terna $(A, +\cdot)$ formada por un conjunto G y dos LCI que cumplen*

1. $(A, +)$ *es un grupo abeliano.*
2. $(A, \cdot)$ *tiene la propiedad asociativa.*
3. $(A, +, \cdot)$ *tiene la propiedad distributiva:* $\forall a, b, c \in A \Longrightarrow (a + b)\, c = ac + bc$.

Si $(A, \cdot)$ cumple la propiead conmutativa, el anillo se dice Anillo Conmutativo.

Ejemplo 1.20 *Si $(\mathcal{P}, +, \cdot)$ es el anillo de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{Q}$, es un anillo conmutativo.*

Ejemplo 1.21 *Veremos que $(\mathcal{M}_{n\times n}, +, \cdot)$ el anillo de las matrices es no conmutativo.*

Definición 1.19 *Llamamos* cuerpo *a la terna $(K, +, \cdot)$ formado por un conjunto K y dos LCI, que cumple las siguientes propiedades:*

1. $(K, +, \cdot)$ *es un anillo*

2. *Elemento Neutro o unidad:* $\exists 1 \in K : \forall a \in K \Longrightarrow (a \cdot 1) = (1 \cdot a) = a$
3. *Elementos Inversos:* $\forall a \in K, a \neq 0$ *(elemento neutro de K para $+$)*$\Rightarrow \exists b \in K : (x \cdot y) = 1$.
   El elemento inverso se suele poner como $b = a^{-1} = \frac{1}{a}$.

El cuerpo $(K, +, \cdot)$ es *conmutativo, si se cumple la propiedad conmutativa para* $+$ y $\cdot$.

Ejemplo 1.22 $(\mathcal{P}, +, \cdot)$ *con $\mathcal{P}$ el conjunto de polinomios de cualquier grado no es un cuerpo, puesto que los polinomios no tienen inverso.*

Ejemplo 1.23 $(\mathcal{M}_{n\times n}, +, \cdot)$ *con $\mathcal{M}$ las matrices de dimensión $n \times n$, no es un cuerpo puesto que no todos los elementos tienen inverso.*