Capítulo 2

Números complejos

2.1. El conjunto de los complejos

Las diferentes clases de números aparecen por la necesidad de resolver ciertos tipos de problemas. Por ejemplo los números naturales, $\mathbb{N}$, aparecen de la necesidad de contar objetos. Para estos números se define la operación suma $(+)$, que es una ley de composición interna ya que la suma de dos números naturales es otro número natural. Para esta operación se plantean problemas como el de encontrar el número natural que resuelva la ecuación

$$m + x = n$$

siendo m y n dos números naturales conocidos. Esta ecuación tendrá como solución otro nuevo número natural siempre que $n \geq m$. Por el contrario, no existe solución en el conjunto $\mathbb{N}$ para el caso $m > n$; por ejemplo

$$2 + x = 1.$$

Para esta ecuación no encontraremos ningún número natural x tal que al sumarlo con 2 nos de como resultado 1. La solución al problema se obtiene mediante la introducción de los números enteros, $\mathbb{Z}$

$$2 + x = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

De modo que el conjunto $\mathbb{Z}$ estará formado por las soluciones de la ecuación $m + x = n$ cuando $m, n \in \mathbb{N}$.

La aparición de los números racionales (viene de razón o cociente) se puede justificar al tratar de encontrar soluciones para otro tipo de ecuacione, en este caso se emplea otra ley de composición interna: el producto de números enteros; y la ecuación que se pretende resolver es de la forma

$$mx = n; \qquad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Esta ecuación tendrá solución en $\mathbb{Z}$ cuando m divida a n, es decir, cuando n sea múltiplo de m, sin embargo no tendrá solución entera en el resto de casos. Por ejemplo, no hay ningún número entero que resuelva la ecuación

$$3x = 1.$$

Con el fin de solventar este tipo de problemas se define el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, como el conjunto de los números que son soluciones de ecuaciones de la forma $mx = n$, cuando $m, n \in \mathbb{Z}$, es decir, números de la forma $\frac{n}{m}$.

Si se aumenta el grado de complejidad de las ecuaciones empleadas, pasando de una ecuación lineal a una cuadrática como

$$x^2 - c = 0$$

entonces podemos comprobar fácilmente que para algunos valores de $c \geq 0$ la ecuación no tiene solución en $\mathbb{Q}$, por ejemplo para $c = 2$ no existe ningún número racional $p/q \in \mathbb{Q}$, tal que $(p/q)^2 = 2$. Hay que construir otro conjunto de números que permitan resolver este tipo problema: son los números reales, que representaremos por $\mathbb{R}$. El conjunto $\mathbb{R}$ estará formado por las soluciones a las ecuaciones del tipo anterior y de otras similares.

Sin embargo, para la ecuación cuadrática del tipo

$$x^2 + c^2 = 0,$$

con $c \in \mathbb{R}$ y $c \neq 0$, nos encontramos con que es imposible encontrar una solución en $\mathbb{R}$, ya que independientemente del valor que le demos a la variable x, se cumplirá $x^2 \geq 0$ y como $c^2 > 0$ siempre se cumplirá

$$x^2 + c^2 > 0,$$

así que cualquier posible solución de esta ecuación habrá que buscarla fuera del conjunto de los números reales; se hace necesario construir una nueva familia de números capaces de resolver este problema.

La unidad imaginaria

Definición 2.1 *Definimos la **unidad imaginaria** i (Euler, 1707-1783) como una de las soluciones de la ecuación*

$$x^2 + 1 = 0.$$

La unidad imaginaria i (en los textos de ingeniería aparece como j) cumple por tanto

$$i^2 = -1,$$

o bien

$$i = \sqrt{-1}.$$

Suponiendo que para este nuevo número son válidas las operaciones algebráicas usadas con los números reales, otra de las soluciones será $-i = -1 * i$, puesto que

$$(-i)^2 = (-1 \cdot i)^2 = (-1)^2 \, i^2 = (1) \cdot (-1) = -1.$$

Con este nuevo elemento podemos descomponer el polinomio como $x^2 + 1$ como

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Por su definición está claro que $i \notin \mathbb{R}$.

Ahora es posible obtener las soluciones de todas las ecuaciones del tipo

$$x^2 + c^2 = 0,$$

puesto que

$$x^2 + c^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -c^2 \Rightarrow x^2 = (-1) \cdot c^2 = i^2 c^2,$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= c \cdot i \\ &\text{o} \\ x &= -c \cdot i. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1 *Para resolver la ecuación*

$$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3i$$

Con este nuevo elemento, podremos calcular la raíz cuadrada $\sqrt{\lambda}$ de cualquier número real $\lambda \in \mathbb{R}$ como

$$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow \lambda = c^2 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pm c \\ \\ \lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -c^2 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pm ci \end{cases}$$

Los números complejos en forma binómica: parte real e imaginaria

Consideremos ahora la ecuación general de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sabemos que las soluciones de esta ecuación se obtienen mediante la conocida expresión

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

pero ahora podemos calcular la raíz cuadrada independientemente de si el discriminante $b^2 - 4ac$ es o no positivo, así tendremos:

$$\begin{cases} \text{Si} \quad b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ \\ \text{Si} \quad b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} i \end{cases},$$

expresiones que nos sirven de base para la definición de número complejo en forma binómica.

Definición 2.2 *Definimos un número complejo z en* ***forma binómica o cartesiana*** *a una combinación de la forma*

$$z = x + iy$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$, que son la parte real e imaginaria de z, respectivamente. Haces un resumen en la siguiente tabla:

	Definición	*Representación*
$x \in \mathbb{R}$	***Parte Real*** *del número complejo z*	$\mathrm{Re}\,(z) = x$
$y \in \mathbb{R}$	***Parte Imaginaria*** *del número complejo z*	$\mathrm{Im}\,(z) = y$

Ejemplo 2.2 *Ejemplos de números complejos en forma binómica son*

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + i, \\ \\ z_2 &= 2 - 3i. \end{aligned}$$

Para este caso tendremos

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(z_1) &= 1, \qquad \mathrm{Im}\,(z_1) = 1 \\ \\ \mathrm{Re}\,(z_2) &= 2, \qquad \mathrm{Im}\,(z_2) = -3. \end{aligned}$$

Definición 2.3 *Dos números complejos* z_1 *y* z_2 *son iguales si y sólo si lo son su partes reales e imaginarias, es decir*

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\,(z_1) = \mathrm{Re}\,(z_2) \\ \\ \mathrm{Im}\,(z_1) = \mathrm{Im}\,(z_2) \end{cases}.$$

Estamos en condiciones de definir el conjunto de los números complejos.

Definición 2.4 *El conjunto de los números complejos* $\mathbb{C}$ *está definido como*

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid \; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

2.1.1. Relación entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

Está claro que $i \notin \mathbb{R}$, puesto que $i^2 < 0$, sin embargo $i \in \mathbb{C}$, ya que suponiendo que el producto por 0 y por 1 funciona igual que con los números reales, entonces

$$i = 0 + 1 \cdot i \in \mathbb{C},$$

y por tanto $\mathbb{R} \neq \mathbb{C}$. Por otra parte, si $x \in \mathbb{R}$, entonces podemos poner

$$z = x + 0 \cdot i \in \mathbb{C},$$

es decir

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(z) &= x, \\ \\ \mathrm{Im}\,(z) &= 0, \end{aligned}$$

y podemos decir que $\mathbb{R}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

Definición 2.5 *Los números complejos* $z \in \mathbb{C}$ *tales que* $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ *e* $\mathrm{Im}\,(z) \neq 0$ *se denominan* imaginarios puros *y el conjunto de estos números se suele representar por* $i\mathbb{R}$

$$z \text{ es imaginario puro } \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(z) = 0 \text{ y } z \neq 0 \Leftrightarrow z = iy \text{ con } y \neq 0.$$

2.2. Operaciones aritméticas en forma binómica

Vamos a definir dos operaciones internas sobre el conjunto de números complejos, es decir, vamos a definir dos operaciones que usadas sobre dos elementos de $\mathbb{C}$, nos da como resultado otro elemento de $\mathbb{C}$. Para ello consideramos dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ y definimos suma y producto como:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\,,$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.$$

Es decir

$$\text{SUMA } (+) \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1+z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2) \\ \\ \operatorname{Im}(z_1+z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2) \end{cases},$$

$$\text{PRODUCTO } (\cdot) \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2) \\ \\ \operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Im}(z_2) + \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) \end{cases}.$$

El resultado en ambas operaciones es obviamente un nuevo número complejo en forma binómica.

Para entender mejor estas operaciones, podemos considerar a i como un parámetro con la propiedad de que $i^2 = -1$ y después utilizar las propiedades asociativa y conmutativa de los números reales, de este modo para la suma se tendría

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2),$$

y sacando i factor común

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Mientras que para el producto

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i^2 y_1y_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2,$$

y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$ y sacando factor común i :

$$z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Obteniéndose los mismos resultados que en la definición.

Ejemplo 2.3 *Dados $z = 1 + i$ y $w = -3 + 4i$ entonces*

$$z + w = (1+i) + (-3+4i) = (1-3) + i(1+4) = -2 + 5i.$$

$$z \cdot w = (1+i)(-3+4i) = \{1 \cdot (-3) - 1 \cdot 4\} + i\{1 \cdot 4 + 1 \cdot (-3)\} = -7 + i.$$

Definición 2.6 *El **elemento neutro** para la suma es el elemento cero $0 + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$ (que se escribirá de forma abreviada como 0):*

Para cualquier número complejo $z = x + iy$ se cumple

$$z + 0 = (x + iy) + (0 + i \cdot 0) = (x + 0) + i(y + 0) = x + iy = z.$$

Definición 2.7 *Para cada complejo $z \in \mathbb{C}$, definimos su complejo **opuesto**, como aquel complejo $w \in \mathbb{C}$ tal que*

$$z + w = 0.$$

Está claro que si $z = x + iy$ entonces

$$w = -x - iy.$$

Y el complejo opuesto de z se representará como $-z$.

Ejemplo 2.4 *Dados $z = 1 + i$ entonces su opuesto será:*

$$-z = -(1+i) = -1 - i.$$

Definición 2.8 *El elemento neutro del producto es el elemento unidad $1 + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$ (que se escribirá de forma abreviada como 1):*

Para cualquier número complejo $z = x + iy$ se cumple

$$z \cdot 1 = (x+iy)(1 + i \cdot 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0) + i(x \cdot 0 + y \cdot 1) = x + iy = z.$$

Definición 2.9 *Para cada complejo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ definimos su* ***inverso****, como aquel complejo $w \in \mathbb{C}$ tal que*

$$z \cdot w = 1.$$

El elemento 0 no tiene elemento inverso ya que

$$\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow z \cdot 0 = (x+iy)(0 + i \cdot 0) = (x \cdot 0 - y \cdot 0) + i(x \cdot 0 + y \cdot 0) = 0 + i \cdot 0 = 0.$$

y por tanto no existe ningún número complejo que al multiplicarlo por 0 se obtenga el valor de 1.

Para obtener la expresión binómica del elemento inverso utilizamos su definición y la del producto de dos complejos. Consideremos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$z_1 \cdot z_2 = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1x_2 - y_1y_2 = 1 \\ \\ x_1y_2 + x_2y_1 = 0 \end{array} \right. .$$

Dado $z_1 = x_1 + iy_1$ obtenemos un sistema lineal en las variables x_2 e y_2 que tiene una única solución si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de 0, es decir, cuando

$$\begin{vmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2 + y_1^2 \neq 0,$$

y esto sólo ocurre si $x_1 = y_1 = 0$, de ahí que si $z \neq 0$ el sistema tiene solución. Usando la regla de Cramer obtendremos los valores para x_2 e y_2

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -y_1 \\ 0 & x_1 \end{vmatrix}}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \\ y_2 &= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ y_1 & 0 \end{vmatrix}}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2}, \end{aligned}$$

y la expresión binómica para el inverso de $z = x_1 + iy_1 \neq 0$ es

$$z_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - i\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Siguiendo la notación usual de los números reales, representaremos por z^{-1} o $\frac{1}{z}$ al complejo inverso de z.

Ejemplo 2.5 *Vamos a calcular el inverso de $z = 1 + i$ mediante la expresión anterior*

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ \\ y_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Una vez definido el inverso podemos definir el cociente entre dos números complejos.

Definición 2.10 *Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con $z_2 \neq 0$, definimos su* ***cociente*** $\frac{z_1}{z_2} = z_1/z_2$ *como*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1},$$

que está bien definido puesto que como $z_2 \neq 0$, existirá su inverso z_2^{-1}.

Ejemplo 2.6 *Vamos a calcular el cociente entre $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 2 + 3i$. Necesitamos en primer lugar calcular z_2^{-1}*

$$z_2^{-1} = (2 + 3i)^{-1} = \frac{2}{2^2 + 3^2} - \frac{3}{2^2 + 3^2}i = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i,$$

y el cociente será

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i}{2 + 3i} = (1 + i) \cdot (2 + 3i)^{-1} = (1 + i) \cdot \left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i\right) = \left(\frac{2}{13} + \frac{3}{13}\right) + \left(-\frac{3}{13} + \frac{2}{13}\right) i = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i.$$

Proposición 2.1 *Con las operaciones de suma y producto, el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos tiene estructura de* Cuerpo.

Que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sea un cuerpo quiere decir que se cumplen una serie de propiedades que indicamos a continuación:

1. $(\mathbb{C}, +)$ El conjunto de los números complejos junto con la operación suma es un grupo abeliano.

   a) *Conmutativa:* $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
   $$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

   b) *Asociativa:* $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
   $$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)\,.$$

   c) *Elemento neutro:* El elemento neutro para la suma es el 0.

   d) *Elemento opuesto*: Para cada número complejo $z = x + iy$ hemos definido su opuesto $-z = -x - iy$.

2. $(\mathbb{C}, \cdot)$ El conjunto de los números complejos junto con la operación producto es un grupo abeliano:

   a) *Conmutativa:*$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
   $$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

   b) *Asociativa:*$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
   $$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

   c) *Elemento neutro:* El elemento neutro para el producto es el elemento unidad 1.

d) *Elemento inverso*: Para cualquier número complejo $z \neq 0$ hemos definido su inverso z^{-1} como

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cumple la propiedad distributiva:

a) *Distributiva del producto respecto a la suma*: Dados tres números complejos z_1, z_2 y z_3 se cumple

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

2.3. Conjugado

Definición 2.11 *Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$, se define su complejo* ***conjugado*** $\overline{z}$ *(o también z^*) al número complejo definido como*

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\overline{z}) = \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(\overline{z}) = -\operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

O en forma binómica

$$z = x + iy \Rightarrow \overline{z} = x - iy.$$

Ejemplo 2.7 *Dado $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -3 - i$, entonces*

$$\begin{aligned} \overline{z}_1 &= 1 - i, \\ \overline{z}_2 &= -3 + i. \end{aligned}$$

Proposición 2.2 *Dados $z, w \in \mathbb{C}$, se cumplen las siguientes propiedades*

1. Números reales:

$$z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff z = \overline{z}.$$

2. Números imaginarios puros:

$$z \in i\mathbb{R} \iff \operatorname{Re}(z) = 0 \iff z = -\overline{z}.$$

3. Partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \frac{z + \overline{z}}{2}, \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{z - \overline{z}}{2i}. \end{aligned}$$

4. Doble conjugación:

$$z \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{\overline{z}} = z$$

5. Suma:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}.$$

6. Producto:
$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

7. Cociente:
$$\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

8. Módulo:
$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+$$

9. Inverso:
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + x^2} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$$

10. Cociente de complejos mediante el conjugado:
$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}}$$

Demostración: Las demostraciones son sencillas utilizando la definición de $\overline{z}$ y se dejan como ejercicio al lector.

La propiedad que se ha definido como *Módulo* es muy interesante ya que permite reescribir el inverso y el cociente de dos números complejos en términos del conjugado.

Ejemplo 2.8 *Vamos a calcular el cociente entre* $z = 1 + i$ *y* $w = 2 + 3i$ *utilizando la propiedad* 10 :
$$\frac{z}{w} = \frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{(2+3)+i(-3+2)}{(4+9)+i(-6+6)} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i.$$

2.4. El plano complejo

El orden en $\mathbb{C}$

En $\mathbb{C}$ no se puede establecer una relación de orden compatible con el orden natural en $\mathbb{R}$, es decir, dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ no podemos establecer entre ellos relaciones del tipo "$z_1 \geq z_2$" o "$z_1 \leq z_2$" que sean compatibles con el orden que conocemos en $\mathbb{R}$.

Supongamos por el contrario, que podemos establecer un orden en el conjunto de los números complejos compatible con el orden de $\mathbb{R}$, es decir, dados cualquier par de elementos z_1 y z_2 podremos decir si uno es mayor o igual que el otro. Tomaremos los números complejos i y 0, como obviamente no son iguales, podremos decir o bien que $i > 0$ o bien que $i < 0$.

1. Supongamos que $i > 0$. Si el orden establecido fuera compatible con el orden natural de $\mathbb{R}$, la desigualdad anterior no cambiaría de sentido si multiplicáramos cada uno de sus miembros por cualquier número positivo, por example el propio i, entonces debería cumplirse
$$i \cdot i > 0 \cdot i,$$
pero esta operación conduce a
$$i^2 > 0,$$
que es falsa puesto que $i^2 = -1$ que es < 0 para el orden en $\mathbb{R}$.

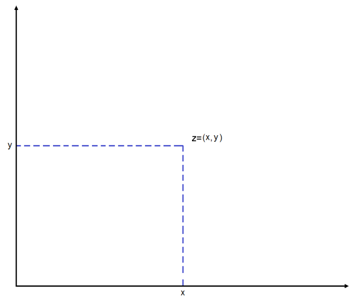

Figura 2.1: Representación de un número complejo en el plano.

2. Llegamos a la misma contradicción si suponemos que $i < 0$. Ya que al multiplicar la desigualdad por cualquier número negativo se invierte el sentido de la misma, y eligiendo ese número como i, entonces
$$i \cdot i > 0 \cdot i,$$
que de nuevo nos conduce a que $-1 < 0$, que es incompatible con el orden establecido en $\mathbb{R}$.

Representación cartesiana. Relación entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$

En el apartado anterior se ha comprobado que $\mathbb{R}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{C}$. En esta sección veremos que existe una relación directa entre el conjunto $\mathbb{C}$ y el plano real $\mathbb{R}^2$. Con el fin de encontrar esa relación tomaremos un número complejo cualquiera $z = x + iy$ y definimos la siguiente aplicación $\mathcal{I}$ entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathcal{I}} & \mathbb{R}^2 \\ z = x + iy & \rightsquigarrow & (x, y) \end{array}.$$

$\mathcal{I}$ es una biyección, a cada complejo le hace corresponder un y sólo un punto en el plano y viceversa. Esta biyección permite definir un número complejo como un punto del plano, obteniéndose así una representación gráfica del complejo z (ver figura 2.1). El par (x, y) es el *afijo* del complejo z. En esta representación al eje de abcisa (eje x) se le llama *eje real*, mientras que el eje de ordenadas (eje y) es el *eje imaginario*.

A partir de esta representación de tipo puntual podemos construir otra de tipo vectorial, si asignamos a cada complejo $x + iy$ un vector con origen el origen de coordenadas y como extremo su afijo correspondiente. Con esta representación es normal referirse al conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ como **plano complejo o plano** z. El complejo 0 no tiene esta representación vectorial, puesto que no existe, por razones obvias, el vector correspondiente.

Módulo de un número complejo

Definición 2.12 *Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$, definimos el **módulo** de z que representamos como $|z|$ al número real positivo definido como*

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Notar que $|z|$ es precisamente la longitud del vector que hemos asociado a z en el apartado anterior (ver figura 2.2).

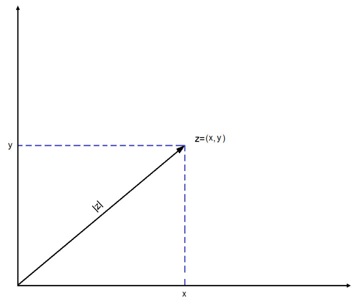

Figura 2.2: Módulo de un número complejo.

Podemos comprobar que en el caso de que z sea un número real entonces el módulo coincide con su valor absoluto

$$z = x + i \cdot 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

Proposición 2.3 *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, el módulo tiene las siguientes propiedades:*

1. Positividad del módulo

$$|z| \geq 0,$$

además

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

2. Equivalencia de módulos

$$|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|\,.$$

3. Producto

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|\,.$$

4. Producto de un número real por un complejo

$$\alpha \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \Rightarrow |\alpha z| = |\alpha|\,|z|\,.$$

5. Inverso

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

6. Cociente

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

7. Desigualdad 1

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}\,(z)| &\leq |z|\,, \\ |\mathrm{Im}\,(z)| &\leq |z|\,. \end{aligned}$$

8. Desigualdad 2 (Triangular)
$$|z+w| \leq |z| + |w| .$$

9. Desigualdad 3 (Triangular Inversa)
$$|z-w| \geq ||z| - |w|| .$$

Demostración:

1. Por definición
$$|z| \geq 0$$
y el módulo será nulo
$$|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 0,$$
identidad que se cumple solamente cuando $x = y = 0$ y en ese caso $z = 0$.

2. Utilizando la defininción y las propiedades del conjugado
$$|-z| = \sqrt{(-z)\cdot\overline{(-z)}} = \sqrt{(-z)\cdot(-\overline{z})} = \sqrt{z\cdot\overline{z}} = |z| ,$$
$$|\overline{z}| = \sqrt{(\overline{z})\cdot\overline{(\overline{z})}} = \sqrt{\overline{z}\cdot z} = \sqrt{z\cdot\overline{z}} = |z| .$$
Con estas dos propiedades la última se cumple de forma trivial.

3. Dado z y $w \in \mathbb{C}$. Por la definición de módulo
$$|z\cdot w|^2 = (z\cdot w)\cdot(\overline{z\cdot w}) = (z\cdot w)\cdot(\overline{z\cdot w}) = (z\cdot w)\cdot(\overline{z}\cdot\overline{w}) .$$
y utilizando la propiedad conmutativa del producto de números complejos
$$|z\cdot w|^2 = (z\cdot w)\cdot(\overline{z}\cdot\overline{w}) = (z\cdot\overline{z})\cdot(w\cdot\overline{w}) = |z|^2\cdot|w|^2 .$$
si ahora se toma la raíz cuadrada en ambos miembros se obtiene la igualdad buscada.

4. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces
$$|\alpha z| = \sqrt{(\alpha z)\,\overline{(\alpha z)}} = \sqrt{(\alpha z)\cdot\overline{\alpha}\overline{z}},$$
como α es real, entonces $\overline{\alpha} = \alpha$
$$\sqrt{(\alpha z)\cdot\overline{\alpha}\overline{z}} = \sqrt{(\alpha z)\cdot(\alpha\overline{z})} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{z\cdot\overline{z}} = |\alpha|\,|z| .$$

5. Teniendo en cuenta la definición de inverso de un número complejo $z \neq 0$
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \Rightarrow \left|z^{-1}\right| = \left|\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right| = \left|\frac{1}{|z|^2}\right| |\overline{z}| = \frac{1}{\left||z|^2\right|}\,|\overline{z}| = \frac{1}{|z|^2}\,|z| = \frac{1}{|z|}.$$

6. Dados $z, w \in \mathbb{C}$, con $w \neq 0$. Por la definición de cociente
$$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|z\cdot w^{-1}\right| = |z|\left|w^{-1}\right| = |z|\left|w^{-1}\right| = |z|\,\frac{1}{|w|} = \frac{|z|}{|w|}.$$

7. Por la definición de módulo
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$
como x e y son números reales se cumple
$$\begin{aligned} x^2 &\geq 0, \\ y^2 &\geq 0, \end{aligned}$$
y como $|z| \geq 0$
$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2+0} = \sqrt{x^2} = |x| = |\mathrm{Re}\,(z)|\,, \\ |z| &= \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{0+y^2} = \sqrt{y^2} = |y| = |\mathrm{Im}\,(z)|\,. \end{aligned}$$

8. Por la definición de módulo
$$|z+w| = \sqrt{(z+w)\cdot\overline{(z+w)}} \Leftrightarrow |z+w|^2 = (z+w)\cdot\overline{(z+w)},$$
y utilizando las propiedades del conjugado
$$|z+w|^2 = (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + z\overline{w} + w\overline{z} + |w|^2\,.$$
Ahora bien como $\overline{\overline{z}} = z$ se tiene
$$z\overline{w} + w\overline{z} = z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w})\,,$$
y teniendo en cuenta la desigualdad demostrada en el apartado anterior
$$2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq |2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w})| \leq 2\,|z\overline{w}|\,.$$
También se ha demostrado que el módulo del producto es el producto de módulos luego
$$2\,|z\overline{w}| = 2\,|z|\,|\overline{w}| = 2\,|z|\,|w|\,,$$
y sustituyendo
$$|z+w|^2 = |z|^2 + z\overline{w} + w\overline{z} + |w|^2 \leq |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2\,.$$
Finalmente tomando raíces cuadradas en los dos miembros se obtiene la desigualdad.

9. Dados $z, w \in \mathbb{C}$
$$|z| = |(z-w)+w| \leq |(z-w)| + |w| \Rightarrow |z| - |w| \leq |(z-w)|$$
$$|w| = |-w| = |(z-w)+z| \leq |(z-w)| + |z| \Rightarrow |w| - |z| \leq |(z-w)| \Rightarrow -\,|w| + |z| \geq -\,|(z-w)|$$
Si utilizamos las dos desigualdades se obtiene
$$-\,|(z-w)| \leq |z| - |w| \leq |(z-w)|$$
de donde por definición de valor absoluto
$$||z| - |w|| \leq |(z-w)|$$

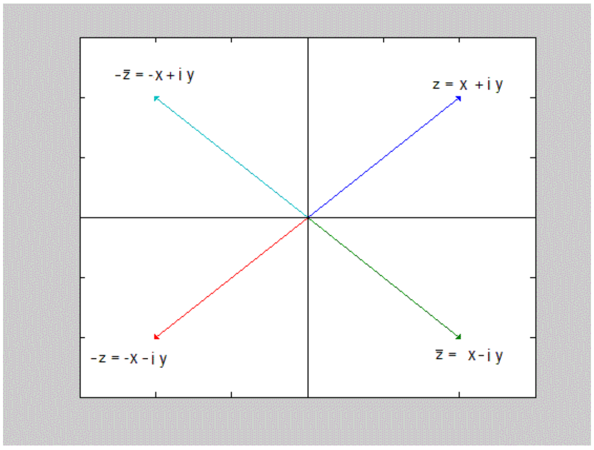

Figura 2.3: Relaciones geométricas entre z, $-z$, $\overline{z}$ y $-\overline{z}$.

Las relaciones geométricas entre z, $-z$, $\overline{z}$ y $\overline{-z} = -\overline{z}$ son muy sencillas de visualizar gráficamente (ver figura 2.3). Dado $z = x + iy$, entonces los afijos de los complejos indicados anteriormente son

$$\begin{aligned} z &= x + yi \Leftrightarrow (x, y) \\ -z &= -x - yi \Leftrightarrow (-x, -y) \\ \overline{z} &= x - yi \Leftrightarrow (x, -y) \\ \overline{-z} &= -x + yi \Leftrightarrow (-x, y) \end{aligned}$$

y gráficamente

Representación polar y exponencial

En el apartado anterior se ha representado un número complejo $z = x + iy$ mediante un vector que va desde el origen de coordenadas hasta el par (x, y). Por otra parte, cada vector no nulo del plano de centro el origen de coordenadas se puede representar en coordenadas polares mediante su longitud y el ángulo que forma con el semieje OX positivo; es posible extender esta representación a los complejos (ver figura 2.4).

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$ y sea $\theta \in \mathbb{R}$ el ángulo que forma el vector asociado a z con el semieje OX positivo. Teniendo en cuenta que $|z|$ es la longitud de ese vector entonces por trigonometría se obtiene

$$\left. \begin{array}{r} x = |z| \cos\theta \\ \\ y = |z| \operatorname{sen}\theta \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z|^2 = x^2 + y^2 \\ \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{array} \right.$$

Definición 2.13 *Se define la* ***forma polar o módulo-argumental*** *del complejo z como*

$$z = |z|_\theta \ \text{ o } \ z = |z|_{<\theta} .$$

Como $z = x + iy$, se obtiene también la llamada ***forma trigonométrica***

$$z = |z| \cos\theta + i\,|z| \operatorname{sen}\theta = r\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) .$$

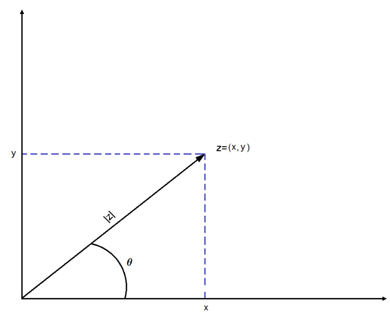

Figura 2.4: Representación polar de un número complejo.

Y si se utiliza la fórmula de Euler (que se demostrará posteriormente)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

se obtiene la representación ***exponencial*** *del número complejo* z

$$z = |z|\, e^{i\theta}.$$

Observación 2.1 *La fórmula de Euler se puede demostrar recurriendo a las conocidas series de Taylor de las funcion* e^x, $\cos x$ *y* $\operatorname{sen} x$. *Consideremos el desarrollo de Taylor de la función* e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

que es válido para cualquier $x \in \mathbb{R}$. *Vamos a definr* $e^{i\theta}$, *utilizando el desarrollo anterior*

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n i\theta^n}{n!},$$

Para calcular las potencias i^n *vamos a distinguir el caso en que* n *es par* ($n = 2m$) *y el caso en que es impar* ($n = 2m + 1$):

$$\begin{cases} n \text{ par} \;\Rightarrow\; n = 2m \;\Rightarrow\; i^n = i^{2n} = \left(i^2\right)^m = (-1)^m, \\[2ex] n \text{ impar} \;\Rightarrow\; n = 2m+1 \;\Rightarrow\; i^n = i^{2n+1} = \left(i^2\right)^m i = (-1)^m i, \end{cases}$$

Esta separación la podemos utilizar en la serie para poner

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n i\theta^n}{n!} = \sum_{n\ par} \frac{i^n i\theta^n}{n!} + \sum_{n\ impar} \frac{i^n i\theta^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2n} i\theta^{2n}}{(2n)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} i\theta^{2n+1}}{(2m+1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2n}}{(2n)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m i\theta^{2n+1}}{(2m+1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2n+1}}{(2m+1)!}, \end{aligned}$$

y las dos series resultantes corresponden a las series de Taylor de $\cos\theta$ *y* $\operatorname{sen}\theta$ *respectivamente, luego*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta.$$

Debido a la periodicidad de la función $\tan(\theta)$, la representación polar no es única, ya que el ángulo $\theta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, también es válido para representar a z y como consecuencia el ángulo θ no está unívocamente determinado.

Definición 2.14 *Dado un número complejo* $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ *definimos su* ***argumento,*** $\arg(z)$, *al conjunto definido como*

$$\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} | \quad z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\},$$

que por la periodicidad de las funciones trigonométricas se puede expresar como

$$\arg(z) = \{\theta + 2k\pi | \text{ siendo } \theta,\ z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\}.$$

Los argumentos se consideran positivos cuando se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativos en el otro caso.

Proposición 2.4 *Dado un número complejo* $z \in \mathbb{C} - \{0\} \Rightarrow$ *Existe un único argumento en cada intervalo de longitud* 2π, *es decir el conjunto*

$$\arg(z) \cap (\alpha, \alpha + 2\pi] = \{\theta\}$$

tiene un único elemento.

Definición 2.15 *Dado un número complejo* $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ *definimos su* ***argumento principal*** $\operatorname{Arg}(z)$ *como el único número que cumple*

$$\operatorname{Arg}(z) = \arg(z) \cap (-\pi, \pi]$$

Ejemplo 2.9 *Dado* $z = 1 + i$, *entonces*

$$\theta = \arctan\frac{1}{1} = \arctan 1 \Rightarrow \arg(z) = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$$

en este caso

$$\operatorname{Arg}(1+i) = \arg(1+i) \cap (-\pi, \pi] = \frac{\pi}{4}$$

Observación 2.2 *Sea* $z \in \mathbb{C}$, *entonces*

$$\begin{aligned}
\text{Si } z &\in R^{+} \Longrightarrow \operatorname{Arg}(z) = 0 \\
\text{Si } z &\in R^{-} \Longrightarrow \operatorname{Arg}(z) = \pi \\
\text{Si } z &\in iR^{+} \Longrightarrow \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} \\
\text{Si } z &\in iR^{-} \Longrightarrow \operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.10 *Algunos complejos en forma polar o exponencial son*

$$\begin{aligned}
1 &= 1_0 = e^{i0} \\
-1 &= 1_\pi = e^{i\pi} \\
i &= 1_{\pi/2} = e^{i\pi/2}
\end{aligned}$$

2.5. Operaciones con números complejos en forma polar

Conjugado en forma polar

Dado el complejo no nulo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, que por tanto tendrá representación exponencial $z = |z|\, e^{i\theta}$ con $\theta \in \arg(z)$, buscamos la forma exponencial de su conjugado $\overline{z}$. Como $z \neq 0$ también ocurrirá $\overline{z} \neq 0$ y por tanto tendrá expresión en forma exponencial. Supongamos por tanto que su forma exponencial es

$$\overline{z} = |\overline{z}|\, e^{i\varphi},$$

donde $\varphi \in \arg(\overline{z})$. Por las propiedades del módulo tendremos

$$|\overline{z}| = |z|\,,$$

por tanto

$$\overline{z} = |z|\, e^{i\varphi} = |z| \cos\varphi + i\, |z| \operatorname{sen}\varphi,$$

si expresamos z en forma trigonométrica

$$z = |z| \cos\theta + i\, |z| \operatorname{sen}\theta.$$

Por la definición de conjugado se debe cumplir

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\overline{z}) &= \operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow |z| \cos\varphi = |z| \cos\theta, \\ \operatorname{Im}(\overline{z}) &= -\operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow |z| \operatorname{sen}\varphi = -\,|z| \operatorname{sen}\theta, \end{aligned}$$

y simplificando

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos\theta, \\ \operatorname{sen}\varphi &= -\operatorname{sen}\theta, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la paridad de las funciones cos y sen

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos(-\theta)\,, \\ \operatorname{sen}\varphi &= \operatorname{sen}(-\theta)\,, \end{aligned}$$

y para que las dos ecuaciones se cumplan de forma simultánea trigonométricas debe ocurrir

$$\varphi = -\theta + 2\pi k,$$

de forma que $-\theta$ es uno de los argumentos de $\overline{z}$ y la forma exponencial del conjugado será

$$\overline{z} = |z|\, e^{-i\theta}.$$

Producto y cociente en forma polar

Sea $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$ y sean $z = |z|\, e^{i\theta}$ y $w = |w|\, e^{i\varphi}$ sus respectivas expresiones en forma exponencial. Si realizamos el producto de ambos, usando además las propiedades elementales de las potencias de la misma base

$$z \cdot w = \left(|z|\, e^{i\theta}\right)\left(|w|\, e^{i\varphi}\right) = |z|\,|w|\, e^{i\theta} e^{i\varphi} = |z \cdot w|\, e^{i(\theta+\varphi)},$$

de donde

$$\theta + \varphi \in \arg(z \cdot w)$$

En definitiva el producto de dos complejos en forma polar es otro complejo cuyo módulo es el producto de módulos y cuyo argumento es la suma de argumentos.

Ejemplo 2.11 *¿Qué significa multiplicar por i?*

Solución: Sea $z \neq 0$ y sea $z = |z|\, e^{i\theta}$. Si queremos saber el significado de la multiplicación por i pondremos también este número en forma exponencial

$$i = 1 \cdot e^{i\pi/2}$$

por tanto:

$$iz = |iz|_{\theta+\pi/2} = |z|_{\theta+\pi/2}$$

y la operación consistirá en girar $\frac{\pi}{2}$ radianes (90^o grados) el vector que representa al número complejo z.

Inverso y cociente en forma polar

Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y sea $|z|\, e^{i\theta}$ su forma exponencial; se quiere encontrar la forma exponencial para z^{-1}, el inverso de z.

Como $z \neq 0$, entonces su inverso existe y será distinto de 0. Por definición de inverso y usando las propiedades de las potencias, se obtiene

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|\, e^{i\theta}} = \frac{1}{|z|} e^{-i\theta},$$

de donde se deduce que

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\,.$$

Con este resultado, es fácil calcular el cociente de números complejos en forma exponencial

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = \left(|z|\, e^{i\theta}\right) \cdot \left(\frac{1}{|w|} e^{-i\varphi}\right) = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\theta-\varphi)}.$$

En forma polar el cociente de dos números complejos es otro número complejo cuyo módulo se obtiene como el cociente de los módulos y cuyo argumento se obtiene como la diferencia entre el argumento del numerador y el del denominador.

Potencias enteras: Teorema de Moivre

Definición 2.16 *Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos la* **potencia** *n–***ésima** *de z, tal y como se define para el caso real como*

$$z^n = z \cdot \cdots \cdot z$$

Expresando z en forma polar y empleando el producto de complejo en forma exponencial se obtiene

$$z^n = \left(|z|\, e^{i\theta}\right) \cdot \cdots \cdot \left(|z|\, e^{i\theta}\right) = |z|^n\, e^{in\theta}$$

luego la potencia n–ésima de un complejo es otro complejo cuyo módulo es la potencia n–ésima del módulo de la base y cuyo argumento es n veces el argumento de la base.

Ejemplo 2.12 *Calcula $(1+i)^4$ en forma polar:*

Solución: Ponemos $(1+i)$ en forma polar

$$(1+i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

y después amplicamos la definición de potencia n–ésima para $n = 4$

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i4\cdot\pi/4} = 2^{4/2}e^{i\pi} = 2^2 e^{i\pi} = -4$$

Teorema 2.5 (Teorema de Moivre) *Sea $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ entonces se cumple*

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta \qquad \textit{(Fórmula de Moivre)}$$

Demostración: Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces tomando $|z| = 1$ y utilizando la expresión para la potencia n–ésima de un número complejo se cumple

$$(1_\theta)^n = 1^n_{n\theta} = 1_{n\theta}$$

que expresamos en forma trigonométrica para obtener el resultado buscado

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$$

Este teorema se puede utilizar, entre otras cosas, para establecer relaciones entre $\cos n\theta$ y $\mathrm{sen}\,n\theta$ y $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$. Por example si $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned}(\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta) &= (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = \cos^2\theta + 2(\cos\theta)(i\,\mathrm{sen}\,\theta) + (i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 \\ &= \left(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta\right) + i\,(2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

e igualando entre partes reales e imaginarias se obtienen las conocidas ecuaciones de las razones trigonométricas de los ángulos dobles en términos de los ángulos sencillos.

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta \\ \mathrm{sen}\,2\theta &= 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\end{aligned}$$

Ejemplo 2.13 *Expresa $\cos(3\theta)$ y $\mathrm{sen}\,(3\theta)$ en términos del ángulo sencillo θ.*

Solución: Tomando $n = 3$ en la fórmula de Moivre, entonces

$$\begin{aligned}(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) &= (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\left(\cos^2\theta\right)(i\operatorname{sen}\theta) + 3(\cos\theta)(i\operatorname{sen}\theta)^2 + (i\operatorname{sen}\theta)^3 \\ &= \left(\cos^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta\right)\end{aligned}$$

de donde por la igualdad entre números complejos

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen} 3\theta &= 3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta\end{aligned}$$

Definición 2.17 *Del mismo modo teniendo en cuenta la definición de inverso, definimos para $n \in \mathbb{N}$*

$$z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^n = \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

Raíces n-ésimas de un número complejo

Definición 2.18 *Sea $z \in \mathbb{C}-\{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos la raíz n–ésima de z a cualquier complejo $w \in \mathbb{C}-\{0\}$ que cumpla*

$$w^n = z$$

Si expresamos w y z en forma polar obtenemos

$$w = |w|\, e^{i\varphi}$$

$$z = |z|\, e^{i\theta}$$

La potencia n–ésima de w sería

$$w^n = |w|^n\, e^{in\varphi}$$

y como w^n es la raíz n–ésima del complejo z, por definición

$$w^n = z \Rightarrow |w|^n\, e^{in\varphi} = |z|\, e^{i\theta}$$

Por una parte los módulos deben ser iguales

$$|w|^n = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$$

y por último el argumento del primero $n\varphi$ y del segundo θ, deben estar en el mismo conjunto, es decir,

$$n\varphi \in \arg(z) = \{\theta + 2k\pi |\, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n\varphi = \theta + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

de donde

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Habrá n raíces distintas, para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, puesto que para $k = n$

$$\frac{\theta + 2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

que proporciona el mismo complejo que para $k = 0$.

Gráficamente (ver gráfica 2.5) las raíces n–ésimas de z están situadas en los vértices de un polígono regular de n lados incrito en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$

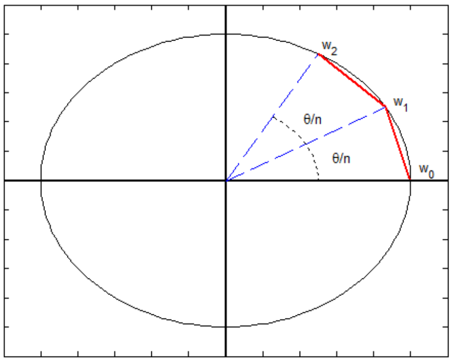

Figura 2.5: Raíces n–ésimas de un número complejo.

Ejemplo 2.14 *Resuelve la ecuación*

$$z^5 + 1 = 0$$

Solución: Buscamos las raíces quintas de -1

$$z^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^5 = -1 \Leftrightarrow z = \sqrt[5]{-1}$$

Poniendo -1 en forma polar

$$-1 = 1_\pi$$

de donde

$$|z| = \sqrt[5]{|-1|} = \sqrt[5]{1} = 1$$

$$\varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{5} \qquad k = 0, \ldots, 4$$

y las raíces son

$$w_k = 1_{\frac{\pi+2k\pi}{5}} \qquad k = 0, \ldots, 4$$

Ejemplo 2.15 *Resuelve la ecuación*

$$z^3 + 8 = 0$$

Solución: Buscamos las raíces cúbicas de -8

$$z^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow z^3 = -8 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{-8}$$

Poniendo -8 en forma polar

$$-8 = 8_\pi$$

de donde

$$|z| = \sqrt[3]{|-8|} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{3} \qquad k = 0, 1, 2$$

y las raíces son

$$w_k = 2_{\frac{\pi+2k\pi}{3}} \qquad k = 0, 1, 2$$

que podemos poner en forma binómica

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2_{\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i \\
w_1 &= 2_{\pi} = -2 \\
w_0 &= 2_{\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.16 *Calcula*

$$\sqrt{1+i}$$

Solución: Ponemos el complejo en forma polar

$$1 + i = |1+i|_{\pi/4}$$

y a continuación calculamos las dos raíces cuadradas

$$\begin{aligned}
w_0 &= |1+i|_{\frac{\pi/4}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)_{\pi/8} \\
w_1 &= |1+i|_{\frac{\pi/4+2\pi}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)_{9\pi/8}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.17 *Calcula*

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}$$

Solución: Ponemos el complejo en forma polar

$$1 + i\sqrt{3} = 2_{\pi/3}$$

y a continuación calculamos las dos raíces cuadradas

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{2}_{\frac{\pi/3}{2}} = \sqrt{2}_{\pi/6} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \\
w_1 &= \sqrt{2}_{\frac{\pi/3+2\pi}{2}} = \sqrt{2}_{7\pi/6} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i
\end{aligned}$$

Observación 2.3 *Raíces n–ésimas para casos especiales*

- *Si* $z \in \mathbb{R}^+$ *y* n *es par, entonces hay* 2 *raíces* n*–ésimas reales*

$$z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow z = |z|_0 \Rightarrow w^n = z \Leftrightarrow w_k = |w|_{\varphi_k}$$

con

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{0 + 2k\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n}$$

como n *es par, entonces* $n = 2m$

$$\varphi_k = \frac{2k\pi}{2m} = \frac{k\pi}{m} \Rightarrow \begin{cases} \textit{Si } k = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0 & \textit{Raíz real positiva} \\ \textit{Si } k = m \ (< n) \Rightarrow \varphi_m = \pi & \textit{Raíz real negativa} \end{cases}$$

- *Si $z \in \mathbb{R}^+$ y n es impar, entonces hay sólo 1 raíz n–ésima real*

$$z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow z = |z|_0 \Rightarrow w^n = z \Leftrightarrow w_k = |w|_{\varphi_k}$$

con

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{0 + 2k\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n}$$

como n es impar, entonces $n = 2m + 1$

$$\varphi_k = \frac{2k\pi}{2m+1} \Rightarrow \left\{ \quad \textit{Si } k = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0 \qquad \textit{Raíz real positiva} \right.$$

Como en la fracción $\frac{2k}{2m+1}$, el numerador es par y el denominador es impar, el cociente (salvo el caso $k = 0$) no será un número entero y por tanto φ_k no será un múltiplo entero de π y el resto de raíces serán complejas.

- *Si $z \in \mathbb{R}^-$ y n es par entonces no hay raíces reales*

$$z \in \mathbb{R}^- \Rightarrow z = |z|_\pi \Rightarrow w^n = z \Leftrightarrow w_k = |w|_{\varphi_k}$$

con

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\pi + 2k\pi}{n} = \frac{(2k+1)\,\pi}{n}$$

como n es par, entonces $n = 2m$

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)}{2m}\pi$$

como el numerador de la fracción es impar y el denominador es par, el cociente no será nunca un número entero y φ_k no será nunca un múltiplo entero de π, y por tanto el complejo w_k no será nunca un número real.

- *Si $z \in \mathbb{R}^-$ y n es impar, entonces hay 1 raíz n–ésima real negativa*

$$z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow z = |z|_\pi \Rightarrow w^n = z \Leftrightarrow w_k = |w|_{\varphi_k}$$

con

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\pi + 2k\pi}{n} = \frac{(2k+1)\,\pi}{n}$$

como n es impar, entonces $n = 2m + 1$

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)\,\pi}{2m+1} \Rightarrow \left\{ \ \textit{Si } k = m \ \ (< n) \Rightarrow \varphi_k = \pi \qquad \textit{Raíz real negativa} \right.$$

Potencias racionales

Si $z \in \mathbb{C}-\{0\}$ y $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, definimos la potencia fraccionaria $z^{m/n}$ como

$$z^{m/n} = \sqrt[n]{z^m}$$

es decir $z^{m/n}$ son las raíces n–ésimas de z^m.

Ejemplo 2.18 *Calcula*

$$(1+i)^{4/3}$$

Solución: Empleando la definición

$$(1+i)^{4/3} = \sqrt[3]{(1+i)^4}$$

Utilizamos la forma exponencial del complejo

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

que elevamos a 4

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^4 = 4e^{i\pi} = -4$$

y ahora calculamos las raíces cúbicas de este complejo

$$\sqrt[3]{(1+i)^4} = \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{4e^{i\pi}} = w_k \quad k = 0,1,2$$

que son para $\varphi_k = \frac{\pi+2k\pi}{3}$ con $k = 0,1,2$

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{4}e^{i\pi/3} = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ w_1 &= \sqrt[3]{4}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{4} \\ w_2 &= \sqrt[3]{4}e^{i5\pi/3} = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$