Capítulo 7

Diagonalización de matrices

7.1. Valores y vectores propios

Definición 7.1 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ y V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Si para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\vec{v} \in V$, con $\vec{v} \neq \vec{0}$, se cumple*

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

entonces, se dice que λ es un valor propio o autovalor *(eigenvalue) de A y que $\vec{v}$ es un* vector propio o autovector *(eigenvector) de A. En este caso λ es un valor propio de A asociado al vector propio $\vec{v}$ y viceversa.*

Definición 7.2 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Si para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\vec{v} \in V$, con $\vec{v} \neq \vec{0}$, se cumple*

$$f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

entonces,se dice que λ es un valor propio o autovalor *(eigenvalue) de f y que $\vec{v}$ es un* vector propio o autovector *(eigenvector) de f. En este caso λ es un valor propio de f asociado al vector propio $\vec{v}$ y viceversa.*

Notar que en la definición de vector propio se indica expresamente que el vector $\vec{v}$ es no nulo, el escalar λ sí puede tomar el valor 0.

Proposición 7.1 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ y V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial*

1. *Cada vector propio de A está asociado a un y sólo un valor propio.*
2. *Si $\vec{v}$ es un vector propio asociado al valor propio λ, entonces el vector $\alpha\vec{v}$ con $\alpha \in \mathbb{K}$ también es un vector propio asociado a λ.*
3. *Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ son vectores propios asociados al valor propio λ, entonces el vector $\vec{v} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \vec{v}_k$ con $\alpha_k \in \mathbb{K}$ también es un vector propio asociado a λ.*

Demostración:

1. Si λ_1 y λ_2 fueran dos valores propios asociados al vector propio $\vec{v}$, entonces se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} A\vec{v} = \lambda_1\vec{v} \\ \\ A\vec{v} = \lambda_2\vec{v} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda_1\vec{v} - \lambda_2\vec{v} = 0 \Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{v} = 0 \overset{\vec{v}\neq\vec{0}}{\Longrightarrow} (\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

2. Sea $\vec{v}$ vector propio asociado al valor propio λ, con $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, entonces:

$$A\left(\alpha\vec{v}\right) = \alpha\left(A\vec{v}\right) = \alpha\left(\lambda\vec{v}\right) = \lambda\left(\alpha\vec{v}\right),$$

y por tanto $\alpha\vec{v}$ es un vector propio asociado al valor propio λ.

3. Sean$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ vectores propios asociados al valor propio $\lambda \Rightarrow A\vec{v}_k = \lambda\vec{v}_k$, entonces si $\vec{v} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \vec{v}_k$: θ

$$A\vec{v} = A\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{m} A\left(\alpha_k \vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\left(A\vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda \vec{v}_k = \lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \vec{v}_k = \lambda\vec{v},$$

luego $\vec{v}$ es un vector propio asociado al valor propio λ.

Ejemplo 7.1 *Comprueba que el vector $\vec{v} = (1, 1)$ es un vector propio de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\vec{v}$$

En este caso el valor propio asociado a $\vec{v}$ es $\lambda = 5$.

Ejemplo 7.2 *Comprueba que el vector $\vec{v} = (1, 0, 1)$ es un vector propio de la aplicación lineal $f(x, y, z)$ definida por*

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, 3y, 4x - y - 4z)$$

Solución:

$$f(1, 0, 1) = (0, 0, 0) = 0 \cdot (1, 0, 1)$$

En este caso el valor propio asociado a $\vec{v}$ es $\lambda = 0$.

Proposición 7.2 *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Si $A = M_{C_n \to C_n}(f)$ es la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$, entonces A y f tienen los mismos valores y vectores propios.*

Demostración: Recordemos que si $A = M_{C_n \to C_n}(f)$ es la matriz respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ entonces $f(\vec{v}) = M_{C_n \to C_n}(f)\,\vec{v}$, luego el resultado se cumple de forma directa.

7.2. Subespacios vectoriales propios. Polinomio característico.

Definición 7.3 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, definimos su núcleo como*

$$\ker(A) = \{\vec{v} \in V \mid A\vec{v} = 0\}$$

En el caso en el que $A = M_{C_n \to C_n}(f)$ sea la matriz asociada a $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ respecto a las bases canónicas C_n, podemos comprobar de forma trivial que $\ker(f) = \ker(A)$, sin más que utilizar que, en este caso, $f(\vec{v}) = M_{C_n \to C_n}(f)\,\vec{v}$. Por tanto, $\ker(A)$ es un subespacio vectorial de V cuya dimensión viene dada por el teorema de Rouché-Frobenius

$$\dim(\ker(A)) = n - r(A).$$

donde $r(A)$ es el rango de A.

Proposición 7.3 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces*

$$\lambda \text{ es un valor propio de } A \Longleftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) \neq \left\{\vec{0}\right\}$$

Demostración: Sea $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ la matriz identidad. Si λ es un valor propio de A asociado al vector propio $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Longleftrightarrow A\vec{v} = \lambda I_n\vec{v} \Longleftrightarrow (A\vec{v} - \lambda I_n\vec{v}) = 0 \Longleftrightarrow (A - \lambda I_n)\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} \in \ker(A - \lambda I_n)$$

Como $\vec{v}$ es un vector propio, entonces $\vec{v} \neq 0$ y por tanto se demuestra que $\ker(A - \lambda I_n) \neq \left\{\vec{0}\right\}$

Proposición 7.4 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces*

$$\lambda \text{ es un valor propio de } A \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Demostración: Como λ es un valor propio de A, por la proposición 7.3, tendremos $\ker(A - \lambda I_n) \neq \left\{\vec{0}\right\}$ y por tanto $\dim(\ker(A - \lambda I_n)) > 0$

$$\dim(\ker(A - \lambda I_n)) = n - r(A - \lambda I_n) > 0 \Longrightarrow r(A - \lambda I_n) < n \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Definición 7.4 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de A, llamamos* subespacio propio *de la matriz A asociado al valor propio λ al conjunto:*

$$N_\lambda = \ker(A - \lambda I) = \{\vec{v} \in V \mid (A - \lambda I)\vec{v} = 0\} = \{\vec{v} \in V \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v}\}$$

Como N_λ es el núcleo de una matriz, es un subespacio vectorial de V que contiene los vectores propios asociados al valor propio λ y además, aunque no sea válido como vector propio, también ocurre $\vec{0} \in N_\lambda$.

Proposición 7.5 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial, entonces la suma de subespacios propios es directa, es decir, si $\lambda_i \neq \lambda_j$ son dos valores propios distintos de A, entonces*

$$N_{\lambda_i} \cap N_{\lambda_j} = \left\{\vec{0}\right\}$$

Esto implica que dos vectores propios asociados a dos valores propios distintos son linealmente independientes

Demostración: Por la proposición 7.1, cada vector propio está en un y sólo un subespacio propio y al ser vectores propios, ninguno de los dos es nulo..

Definición 7.5 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, definimos el* polinomio característico *de A al polinomio de grado n definido por*

$$p(\lambda) = \phi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Observación 7.1 *Las raíces del polinomio $p(\lambda)$ son los valores propios de la matriz A.*

Definición 7.6 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de A. Se llama* multiplicidad *de λ como valor propio de la matriz A a la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico $p(\lambda)$ y la denotamos por $m(\lambda)$.*

La suma de las multiplicidades de todos los valores propios de A es el grado del polinomio característico, es decir, la dimensión de la matriz.

Proposición 7.6 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y sea $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de A, entonces*

$$\dim\left(\ker\left(A - \lambda I_n\right)\right) \leq m\left(\lambda\right)$$

Observación 7.2 *Notar que si λ es un valor propio de A, entonces como debe existir $\vec{v} \neq 0$ con $\vec{v} \in \ker\left(A - \lambda I_n\right)$, entonces $\dim\left(\ker\left(A - \lambda I_n\right)\right) \geq 1$, así junto con la proposición anterior se debe cumplir*

$$1 \leq \dim\left(\ker\left(A - \lambda I_n\right)\right) \leq m\left(\lambda\right)$$

Ejemplo 7.3 *Ecuentra el polinomio característico $p\left(\lambda\right)$ y los valores y vectores propios de*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución: Calculamos su polinomio característico

$$\phi_{A_1}\left(\lambda\right) = \det\left(A_1 - \lambda I_2\right) = \left|\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5-\lambda & 5 \\ 3 & 7-\lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda^2 - 12\lambda + 20$$

Obtenemos los valores propios igualando a 0

$$\phi_{A_1}\left(\lambda\right) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 12\lambda + 20 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 10;\ \lambda_2 = 2.$$

Vamos a encontrar los vectores propios asociados a cada valor propio. Supongamos que $\vec{v}_1 = (x, y)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 2$, entonces

$$\vec{v}_1 \in \ker\left(A - 2I_2\right) \Rightarrow \left(A - 2I_2\right)\vec{v}_1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 5-2 & 5 \\ 3 & 7-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 0 \\ \\ 3x + 5y = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow 3x + 5y = 0,$$

ecuación que tiene por solución paramétrica

$$x = \alpha;\ y = -\frac{3}{5}\alpha \Rightarrow \vec{v}_1 = \left(\alpha, -\frac{3}{5}\alpha\right) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \left\langle\left\{\left(1, -\frac{3}{5}\right)\right\}\right\rangle.$$

Supongamos ahora que $\vec{v}_2 = (x, y)$ es el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 10$, entonces

$$\vec{v}_2 \in \ker\left(A - 2I_2\right) \Rightarrow \left(A - 10I_2\right)\vec{v}_2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 5-10 & 5 \\ 3 & 7-10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{r} -5x + 5y = 0 \\ \\ 3x - 3y = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow x - y = 0,$$

ecuación que tiene por solución paramétrica

$$x = \alpha;\ y = \alpha \Rightarrow v_2 = (\alpha, \alpha) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \left\langle\left\{(1, 1)\right\}\right\rangle.$$

Ejemplo 7.4 *Encuentra el polinomio característico* $p(\lambda)$ *y los valores y vectores propios de*

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\phi_{A_2}(\lambda) = \det(A_2 - \lambda I_3) = \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 4 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} \right| = (2-\lambda)^2 (6-\lambda)$$

Obtenemos los valores propios igualando a 0

$$\phi_{A_2}(\lambda) = 0 \iff (2-\lambda)^2 (6-\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 2;\ \lambda_3 = 6.$$

Si $\vec{v}_1 = (x, y, z)$ es el valor propio asociado a $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces

$$(A - 2I)\vec{v}_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ 4x + 5z \\ 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistema que tiene por solución

$$x = z = 0;\ y = \alpha \Rightarrow \vec{v}_1 = (0, \alpha, 0) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(0, 1, 0)\} \rangle .$$

Mientras que si $\vec{v}_3 = (x, y, z)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_3 = 6$, entonces:

$$(A - 6I_3)\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -4x + z \\ 4x - 4y + 5z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\left. \begin{array}{r} -4x + z = 0 \\ \\ 4x - 4y + 5z = 0 \end{array} \right\}$$

que tiene por solución

$$x = \alpha, y = 6\alpha, z = 4\alpha \Rightarrow \vec{v}_3 = (\alpha, 6\alpha, 4\alpha) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle \{(1, 6, 4)\} \rangle$$

Ejemplo 7.5 *Encuentra el polinomio característico* $p(\lambda)$ *y los valores y vectores propios de*

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\phi_{A_3}(\lambda) = \det(A_3 - \lambda I_2) = \left| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = (3-\lambda)^2 + 4$$

Obtenemos los valores propios igualando a 0

$$\phi_{A_3}(\lambda) = 0 \iff (3-\lambda)^2 + 4 = 0 \iff \lambda_1 = 3 + 2i;\ \lambda_2 = 3 - 2i.$$

Como los valores propios son complejos, sobre $\mathbb{R}^2$ no hay valores propios asociados.

Observación 7.3 *Si en el ejercicio anterior consideramos $A \in M_2(\mathbb{C})$ entonces si $v = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ es el vector propio asociado a $\lambda_1 = 3 + 2i$, entonces se cumple:*

$$(A_3 - (3+2i)I_2)\,\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} -i2z_1 - 2z_2 = 0 \\ 2z_1 - i2z_2 = 0 \end{array}$$

que tiene por solución

$$z_1 = iz_2,$$

de este modo si $z_2 = \alpha + i\beta$, entonces los valores propios asociados a λ_1 son de la forma

$$\vec{v}_1 = (-\beta + i\alpha, \alpha + i\beta)\,.$$

De forma completamente análoga se procede para el valor propio $\lambda_2 = 3 - 2i$

$$(A_3 - (3-2i)I_2)\,\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} i2z_1 - 2z_2 = 0 \\ \\ 2z_1 + i2z_2 = 0 \end{array}$$

sistema que tiene por solución

$$z_2 = iz_1,$$

de este modo si $z_1 = \alpha + i\beta$, entonces los valores propios asociados a λ_2 son de la forma

$$\vec{v}_2 = (\alpha + i\beta, -\beta + i\alpha)\,.$$

Ejemplo 7.6 *Encuentra el polinomio característico $p(\lambda)$ y los valores y vectores propios de*

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\phi_{A_4}(\lambda) = \det(A_4 - \lambda I_3) = \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (-1-\lambda)^3$$

Obtenemos los valores propios igualando a 0

$$\phi_{A_4}(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow (-1-\lambda)^3 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Vamos a encontrar los vectores propios asociados al único valor propio. Tomamos $\vec{v} = (x, y, z)$

$$(A + I_3)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 3z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución tiene $z = 0$, mientras que $x = \alpha$ e $y = \beta$ son libres, los vectores propios son de la forma $\vec{v} = (\alpha, \beta, 0)$ y $N_{\lambda_1} = \langle\{(1,0,0)\,;(0,1,0)\}\rangle$.

Ejemplo 7.7 *Encuentra el polinomio característico $p(\lambda)$ y los valores y vectores propios de*

$$A_5 = \begin{pmatrix} 4i & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 0 \\ 8 & 0 & 6-2i \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\phi_{A_5}(\lambda) = \det(A_5 - \lambda I_3) = \left| \begin{pmatrix} 4i & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 0 \\ 8 & 0 & 6-2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 4i-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & -7-\lambda & 0 \\ 8 & 0 & 6-2i-\lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= (4i-\lambda)(-7-\lambda)(6-2i-\lambda)$$

Obtenemos los valores propios igualando a 0

$$\phi_{A_5}(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow (4i-\lambda)(-7-\lambda)(6-2i-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 4i; \lambda_2 = -7; \lambda_3 = 6-2i.$$

Vamos a encontrar los vectores propios asociados para cada valor propio encontrado. Para el valor propio $\lambda_1 = 4i$, tomamos $\vec{v} = (x, y, z)$ con $x, y, z \in \mathbb{C}$ y

$$\begin{aligned} (A - 4iI_3)\vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -7-4i & 0 \\ 8 & 0 & 6-6i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 4x - (7+4i)y \\ 8x + 6(1-i)z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se obtiene

$$y = \frac{4}{7+4i}x$$

y de la tercera

$$z = \frac{8}{-1+i}x$$

siendo los vectores propios asociados a λ_1 de la forma

$$\left(x, \frac{4}{7+4i}x, \frac{8}{-1+i}x\right) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \left(1, \frac{4}{7+4i}, \frac{8}{-1+i}\right) \right\} \right\rangle$$

Para el valor propio $\lambda_2 = -7$, tomamos $\vec{v} = (x, y, z)$ con $x, y, z \in \mathbb{C}$ y

$$\begin{aligned}
(A + 7I)\,\vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 4i+7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 13-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \\
\begin{pmatrix} (7+4i)\,x \\ 4x \\ 8x + (13-2i)\,z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Claramente

$$x = z = 0$$

y los vectores propios asociados a λ_2 son de la forma

$$(0, y, 0) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(0,1,0)\} \rangle$$

Finalmente para $\lambda_3 = 6 - 2i$

$$\begin{pmatrix} 4i-(6-2i) & 0 & 0 \\ 4 & -7-(6-2i) & 0 \\ 8 & 0 & 6-2i-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(A + (6-2i)\,I)\,\vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \\
\begin{pmatrix} -6+6i & 0 & 0 \\ 4 & -13+2i & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \\
\begin{pmatrix} (-6+6i)\,x \\ 4x + (-13+2i)\,y \\ 8x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

claramente

$$x = y = 0$$

mientras que z será libre, luego los vectores propios asociados serán

$$(0, 0, z) \Rightarrow N_{\lambda_3} = \langle \{(0,0,1)\} \rangle\,.$$

Observación 7.4 *Si A es una matriz triangular inferior o superior, entonces los valores propios son los elementos de la diagonal principal*

$$\lambda_k = a_{kk}$$

Proposición 7.7 *Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico y por tanto, los mismos valores propios y multiplicidad.*

Demostración: Supongamos que $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ son dos matrices semejantes, entonces sabemos que $\exists Q \in M_n(\mathbb{K})$ invertible tal que $A = Q^{-1}BQ$. El polinomio característico de A es

$$\phi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

o en función de B

$$\phi_A(\lambda) = \det\left(Q^{-1}BQ - \lambda I_n\right)$$

como Q es invertible, entonces $Q^{-1}Q = I$ y podemos poner

$$\phi_A(\lambda) = \det\left(Q^{-1}BQ - \lambda Q^{-1}Q\right)$$

Sacando factor común Q^{-1} a la izquierda y Q a la derecha (recordemos que el producto de matrices es distributivo a izquierda y derecha)

$$\phi_A(\lambda) = \det\left(Q^{-1}(B - \lambda I_n)Q\right)$$

El determinante de un producto de matrices es el producto de determinantes, luego

$$\phi_A(\lambda) = \det\left(Q^{-1}\right)\det(B - \lambda I_n)\det(Q)$$

y teniendo en cuenta que $\det\left(Q^{-1}\right) = \frac{1}{\det(Q)}$

$$\phi_A(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \phi_B(\lambda)$$

Si bien los vectores propios coinciden para dos matrices semejantes, para los vectorees propios no ocurre lo mismo, si bien hay una relación directa. Si $\vec{v} \in V$ es un vector propio asociado a valor propio λ, entonces

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

o en función de B

$$Q^{-1}BQ\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

y multiplicando a la izquierda por Q

$$QQ^{-1}BQ\vec{v} = Q\lambda\vec{v}$$

o simplificando y teniendo en cuenta que $\lambda \in \mathbb{K}$ y por tanto se cumple la propiedad pseudoconmutativa

$$I_nBQ\vec{v} = \lambda Q\vec{v} \Longrightarrow BQ\vec{v} = \lambda Q\vec{v}$$

y en este caso comprobamos que $Q\vec{v}$ es un vector propio de B

Finalmente como todas las matrices asociadas a un endomorfismo son semejantes, podemos hablar de polinomio característico asociado al endomorfismo.

Definición 7.7 *Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo, B una base de V y sea A la matriz asociada a B de f, definimos el* polinomio característico *de f al polinomio de grado n definido por*

$$p(\lambda) = \phi_f(\lambda) = \phi_A(\lambda).$$

Ejemplo 7.8 *Calcula los valores propios del endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por*

$$f(x, y, z) = (-2x + 3y + z, -2y + 6z, 4z)$$

Solución: Calculamos la matriz de f asociada a las bases canónicas

$$\left.\begin{array}{r} f(1,0,0) = (-2,0,0) \\ \\ f(0,1,0) = (3,-2,0) \\ \\ f(0,0,1) = (1,6,4) \end{array}\right\} \Rightarrow M_{C_n}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico será

$$\phi_f(\lambda) = \phi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)^2 (4-\lambda)$$

que tiene valores propios

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2 \text{ y } \lambda_3 = 4$$

Proposición 7.8 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial.*

7.3. Matrices diagonalizables

Definición 7.8 *Diremos que $A \in M_n(\mathbb{K})$ es* diagonalizable*, si y sólo si, $\exists D \in M_n(\mathbb{K})$, D matriz diagonal, semejante a la matriz A, es decir, $\exists P \in M_n(\mathbb{K})$, llamada matriz de paso o matriz de cambio de base, tal que*

$$A = P^{-1}DP$$

Definición 7.9 *Diremos que $f : V \longrightarrow V$, endomorfismo con V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, es* diagonalizable*, si y sólo si, $\exists B$, base de V, tal que la matriz asociada a f en la base B ($M_{B\to B}(f)$) es una matriz diagonal.*

En ambos casos, la matriz diagonal estará formada por los valores propios de la matriz A.

Las matrices D y P no tienen porque ser únicas, ya que depende del orden en el que se elijan los valores propios.

Teorema 7.9 *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, endomorfismo sobren $\mathbb{R}^n$, un $\mathbb{K}$-espacio vectorial:*

$$f \text{ es diagonalizable} \Longleftrightarrow M_{C_n\to C_n}(f) \text{ es diagonalizable}$$

Siendo C_n la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Si $A = M_{C_n\to C_n}(f)$ entonces

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad y \quad P = \left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\right)$$

siendo λ_j valor propio de A y $\vec{v}_j$ el vector propio asociado.

Proposición 7.10 *Sea $f : V \longrightarrow V$, endomorfismo sobre V, un $\mathbb{K}$-espacio vectorial:*

$$f \text{ es diagonalizable} \Longleftrightarrow \exists\, B; \text{base de } V, \text{ formada por vectores propios}$$

Observación 7.5 *Para $V=\mathbb{R}^n$, con $A=M_{C_n\to C_n}(f)$ la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, entonces:*

1. $P^{-1}=M_{B\to C_n}$, *es decir, las columnas de P son los vectores de la base B.*
2. $A=P^{-1}DP \Longrightarrow M_{C_n\to C_n}(f)=M_{B\to C_n}M_{B\to B}(f)M_{C_n\to B}=M_{B\to C_n}M_{B\to B}(f)\left(M_{B\to C_n}\right)^{-1}$

Proposición 7.11 *Sea $A\in M_n(\mathbb{R})$, entonces*

$$A \text{ es diagonalizable} \Longleftrightarrow \mathbb{R}^n=N_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus N_{\lambda_m}$$

siendo λ_j valor propio de A y N_{λ_j} el subespacio propio correspondiente.

Este resultado es equivalente a decir que

$$n=\dim(N_{\lambda_1})+\cdots+\dim(N_{\lambda_m})$$

Proposición 7.12 *Sea $A\in M_n(\mathbb{R})$. A es diagonalizable si y sólo si:*

1. *El polinomio característico, $\varphi_A(\lambda)$ sólo tiene raíces reales.*
2. $\dim\left(N_{\lambda_j}\right)=m(\lambda_j)$ *para cada λ_j, valor propio de A.*

Corolario 7.13 *Sea $A\in M_n(\mathbb{R})$. A, si A tiene n valores propios reales y distintos, entonces A es diagonalizable.*

Ejemplo 7.9 *Determina si las siguientes matrices son o no diagonalizables sobre $\mathbb{R}$, en caso afirmativo encuentra una matriz diagonal semejante y una matriz de paso.*

$$A_5=\begin{pmatrix}0&-1&8\\0&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}\qquad A_6=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&0&3\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$A_7=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&0&-5\\0&0&3\end{pmatrix}\qquad A_6=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\8&0&1\end{pmatrix}\qquad A_6=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\4&2&-4\end{pmatrix}$$

Solución: Buscaremos el polinomio característico de cada matriz.

1.

$$\begin{aligned}\phi_{A_5}(\lambda) &= \det(A_5-\lambda I_3)=\left|\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}6-\lambda&1&0\\3&8-\lambda&0\\2&2&5-\lambda\end{pmatrix}\right|=(5-\lambda)\Big|\Big(\\ &= (5-\lambda)\left((6-\lambda)(8-\lambda)-3\right)=(5-\lambda)\left(\lambda^2-14\lambda+45\right)\end{aligned}$$

Obtenemos los valores propios igualando a 0

$$\phi_{A_4}(\lambda)=0\Leftrightarrow(5-\lambda)\left(\lambda^2-14\lambda+45\right)0\Leftrightarrow\lambda=5 \text{ y } \lambda^2-14\lambda+45=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{14\pm\sqrt{196-180}}{2}=\frac{14\pm\sqrt{16}}{2}=$$

Hay 3 valores propios reales, pero hay dos iguales, así que no podemos determinar a primera vista si la matriz es o no diagonalizable. Para comprobarlo tendremos que ver la dimensión de los subespacios propios que deben coincidir con la multiplicidad del valor propio correspondiente.

Vamos a encontrar los vectores propios asociados a cada valor propio. Supongamos que $\vec{v}_1 = (x, y, z)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$, entonces

$$\vec{v}_1 \in \ker(A_4 - \lambda I_3) \Leftrightarrow (A_4 - \lambda I_3)\,\vec{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6-5 & 1 & 0 \\ 3 & 8-5 & 0 \\ 2 & 2 & 5-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\Bigg($$

y por tanto

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ \\ 3x + 3y = 0 \\ \\ 2x + 2y = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \quad x + y = 0 \ \}$$

que tiene por solución $y = -x$, siendo z, luego la solución del sistema es de la forma $(\alpha, -\alpha, \beta)$ y por tanto $N_{\lambda_1} = \langle\{(1, -1, 0)\,; (0, 0, 1)\}\rangle$, subespacio de dimensión 2, que coincide con la multiplicidad de $\lambda_1 = 5$ que es $m(\lambda_1) = 2$.

Vamos a encontrar los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_3 = 9$. Supongamos que $\vec{v} = (x, y, z)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_3 = 9$, entonces

$$\vec{v}_3 \in \ker(A_4 - \lambda_3 I_3) \Leftrightarrow (A_4 - 9I_3)\,\vec{v}_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6-9 & 1 & 0 \\ 3 & 8-9 & 0 \\ 2 & 2 & 5-9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{array}\right.$$

y por tanto

$$\left.\begin{array}{rl} -3x + y = 0 & (1) \\ \\ 3x - y = 0 & (2) \\ \\ 2x + 2y - 4z = 0 & (3) \end{array}\right\}$$

Sumando (1) y (2) obtenemos $y = 3x$, y sustuimos en la ecuacion (3) $2x + 2(3x) - 4z = 0 \Longleftrightarrow 8x - 4z = 0 \Longleftrightarrow z = 2x$, la solución paramétrica es

$$x = \alpha;\ y = 3\alpha; z = 2\alpha \Rightarrow \vec{v}_1 = (\alpha, 3\alpha, 2\alpha) \Rightarrow N_{\lambda_3} = \langle\{(1, 3, 2)\}\rangle\,.$$

La matriz diagonal y la matriz de paso son

$$D_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad P_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

podemos comprobar que

$$\begin{aligned} P_4^{-1} D_4 P_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = A_4 \end{aligned}$$