Capítulo 10

Cálculo diferencial de funciones de una variable

10.1. Derivada de una función

Definición 10.1 *Sea $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $x_0 \in \,]a,b[$. Diremos que f es* derivable en $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

A este límite se le denomina $f'(x_0)$, aunque también pueden utilizarse las siguientes notaciones $\frac{df}{dx}(x_0)$, $f_x(x_0)$ o $f'_x(x_0)$. Haciendo el cambio $x - x_0 = h$, el límite se puede reescribir como

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ejemplo 10.1 *Vamos a calcular la derivada de una función constante usando la definición. Sea $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$, dado cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, calculamos el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

como f es constante, entonces

$$f(x_0 + h) = f(x_0) = k$$

y tendremos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Ejemplo 10.2 *Vamos a calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ mediante la definición. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\left(x_0^2 + 2x_0 h + h^2\right) - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0
\end{aligned}$$

Ejemplo 10.3 *Vamos a calcular la derivada de la función* $f(x) = \sin x$ *mediante la definición. Dado* $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h}$$

utilizamos la expresión del seno de la suma y tendremos

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin x_0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0)(\cos(h) - 1) + \cos(x_0)\sin(h)}{h} \end{aligned}$$

utilizando que el límite de la suma es suma de límites

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0)(\cos(h) - 1) + \cos(x_0)\sin(h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0)(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x_0)\sin(h)}{h} \end{aligned}$$

utilizando infinitésimos equivalentes: $\sin x \sim x$ *y* $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0)(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x_0)\sin(h)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0)\left(-\frac{h^2}{2}\right)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x_0)\,h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} -\frac{h\sin(x_0)}{2} + \lim_{h \to 0} \cos(x_0) \\ &= 0 + \cos(x_0) = \cos(x_0) \end{aligned}$$

Como la derivada está definida mediante un límite, existirán los límites laterales, lo que nos conduce a la definición de función derivable a la derecha y derivable a la izquierda, así una función $f(x)$ es derivable a la derecha en un punto x_0 si existe y es finito el siguiente límite

$$f'\left(x_0^+\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y será derivable a la izquierda si existe y es finito el siguiente límite

$$f'\left(x_0^-\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

obviamente f es derivable en el punto x_0, si y solo si, es derivable a la izquierda y a la derecha de x_0 y ambas derivadas son iguales.

La derivada es un concepto de tipo local puesto que se usan límites y sería la pendiente de la recta que es tangente a la función $f(x)$ en el punto x_0, es decir si consideramos (ver figura) la recta que une los puntos $P = \left(x_0^-, f\left(x_0^-\right)\right)$ y $Q = \left(x_0^- + h, f\left(x_0^- + h\right)\right)$

$$\frac{x - x_0^-}{\left(x_0^- + h\right) - x_0^-} = \frac{y - f\left(x_0^-\right)}{f\left(x_0^- + h\right) - f\left(x_0^-\right)} \Longrightarrow y = \frac{f\left(x_0^- + h\right) - f\left(x_0^-\right)}{h}\left(x - x_0^-\right) + f\left(x_0^-\right)$$

y tomamos límites cuando $h \to 0$, cuando Q se aproxima a P, la recta anterior se acerca a la recta tangente a $f(x)$ en el punto x_0, la pendiente m de esta recta tangente es el valor de la derivada en x_0

$$y = m\left(x - x_0^-\right) + f\left(x_0^-\right) = f'\left(x_0^-\right)\left(x - x_0^-\right) + f\left(x_0^-\right)$$

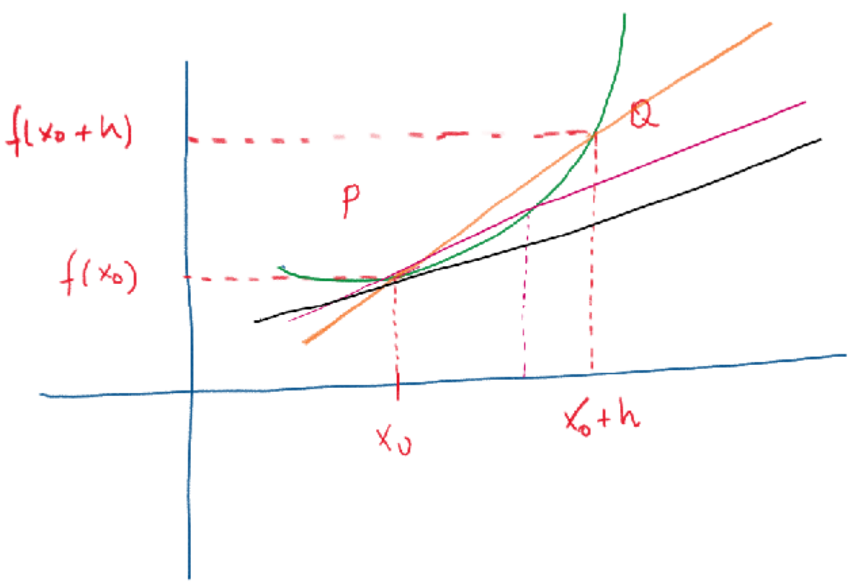


Figura 10.1: Interpretación gráfica de la derivada

Teorema 10.1 *Sea* $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, con* $x_0 \in \,]a, b[$*, entonces*

$$\textit{Si } f(x) \textit{ es derivable en } x_0 \Longrightarrow f \textit{ es continua en } x_0$$

El recíproco del teorema no es cierto, es decir, hay funciones que son continuas, pero no derivables en un punto, por ejemplo

$$f(x) = |x|$$

es continua en $x_0 = 0$, pero no es derivable, ya que si calculamos las derivadas laterales

$$f'\left(0^+\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{h}{h} = 1$$

puesto que como $h > 0 \Rightarrow |h| = h$. Y para la derivada a la izquierda

$$f'\left(0^-\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{-h}{h} = -1$$

donde ahora, como $h < 0 \Rightarrow |h| = -h$. Y se comprueba que $f'(0^+) \neq f(0^-)$ lo que implica que f no sea derivable en 0.

Definición 10.2 *La función* f *es derivable en un intervalo abierto* $]a, b[\Leftrightarrow f$ *es derivable* $\forall x \in \,]a, b[$*.*

En este caso podemos definir una nueva función $f' : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, que a cada punto le haga corresponder el valor de la derivada en ese punto. Esta función puede ser derivable y obtendremos así la llamada derivada segunda,* f''*. El proceso se repite para obtener las sucesivas derivadas:* $f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots$

Ejemplo 10.4 *La derivada de la función $f(x) = x^2$ hemos visto que es $f'(x) = 2x$, podemos utilizar de nuevo la definición de límite para obtener la derivada segunda. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$,*

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x_0+h) - 2x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

como el resultado es constante, deducimos inmediatamente que

$$f'''(x_0) = 0.$$

10.2. Reglas de derivación. Derivadas de funciones elementales

Como ejemplos de funciones derivables tendremos las más usuales: polinomios, trigonométricas, hiperbólicas.

Proposición 10.2 (Reglas de derivación) *Suponiendo que $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, son funciones derivables en I, entonces*

Operador	*Derivada*
Suma de funciones	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
Resta de funciones	$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
Producto por un escalar	$(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$
Producto	$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Proposición 10.3 (Funciones elementales) *Consideremos las funciones elementales:*

Función $f(x)$	*Derivada* $f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\log_a x$	$\log_a e \dfrac{1}{x}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\mathrm{Sh}(x)$	$\mathrm{Ch}(x)$
$\mathrm{Ch}(x)$	$\mathrm{Sh}(x)$
$\mathrm{Th}(x)$	$\dfrac{1}{\mathrm{Ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{Th}^2(x)$

10.3. Regla de la cadena. Función inversa

Teorema 10.4 (Regla de la cadena) *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, f derivable en a. Sea $g : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, derivable en $f(a)$, con $f(I) \subseteq J \Longrightarrow g \circ f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en a y*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Ejemplo 10.5 *Para calcular la derivada de la función*

$$h(x) = \sin\left(x^2\right)$$

hacemos uso de la regla de la cadena. En este caso $g(x) = \sin(x)$ y $f(x) = x^2$, que son funciones derivables con derivada $g'(x) = \cos(x)$ y $f'(x) = 2x$, de modo que

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(f(x))\, 2x = \cos\left(x^2\right) 2x$$

Ejemplo 10.6 *Para calcular la derivada de la función*

$$h(x) = x^x$$

y hacemos uso de la función exponencial y logarítmica para expresar $h(x)$ como

$$h(x) = e^{x \ln(x)}$$

y empleamos la regla de la cadena con $g(x) = e^x$ y $f(x) = x\ln(x)$, que son funciones derivables con derivadas $g'(x) = e^x$ y $f'(x) = (\ln(x) + 1)$ respectivamente, de modo que

$$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x) = e^{f(x)}(\ln(x) + 1) = e^{x\ln x}(\ln(x) + 1) = x^x(\ln(x) + 1).$$

Teorema 10.5 (Función inversa) *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$, $I \neq \varnothing$. Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f inyectiva y sea $f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$, su inversa. Si f es derivable en $a \in I$ y si $b = f(a) \in f(I)$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *f^{-1} es derivable en b.*
2. *f^{-1} es continua en b y $f'(a) \neq 0$*

En este caso tendremos

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

Vamos a deducir la derivada de la función $g(x) = \arcsin(x)$ a partir de la función $\sin(x)$. Consideremos la función $f(x)$ definida por

$$\begin{array}{ccl} f & : & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \left]-1, 1\right[\\ x & \rightsquigarrow & \sin x \end{array}$$

la función f es inyectiva sobre los intervalos indicados, continua y derivable con derivada $f'(x) = \cos x$, por tanto usando el teorema de la función inversa

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

usando la fórmula fundamental de la trigonometría podemos poner

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

tendremos

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Del mismo modo obtenemos

Función $f(x)$	Derivada $f'(x)$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1 + x^2}$
$\arg \mathrm{Sh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
$\arg \mathrm{Ch}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\arg \mathrm{Th}(x)$	$\frac{1}{1 - x^2}$

10.4. Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos

Definición 10.3 *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, entonces*

1. f *es* creciente en $a \Longleftrightarrow \exists \delta > 0$ *tal que* $\forall x_1, x_2 \in \left]a - \delta, a + \delta\right[$ *con* $x_1 < a < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(a) \leq f(x_2)$
2. f *es* estríctamente creciente en $a \Longleftrightarrow \exists \delta > 0$ *tal que* $\forall x_1, x_2 \in \left]a - \delta, a + \delta\right[$ *con* $x_1 < a < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(a) < f(x_2)$
3. f *es* decreciente en $a \Longleftrightarrow \exists \delta > 0$ *tal que* $\forall x_1, x_2 \in \left]a - \delta, a + \delta\right[$ *con* $x_1 < a < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(a) \geq f(x_2)$
4. f *es* estríctamente decreciente en $a \Longleftrightarrow \exists \delta > 0$ *tal que* $\forall x_1, x_2 \in \left]a - \delta, a + \delta\right[$ *con* $x_1 < a < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(a) > f(x_2)$

Proposición 10.6 *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, y f derivable en a*

$$f \text{ es estríctamente creciente } \Longleftrightarrow f'(a) > 0$$

$$f \text{ es estríctamente decreciente } \Longleftrightarrow f'(a) < 0$$

Definición 10.4 *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, entonces*

1. f *tiene un* máximo relativo o local en $a \Longleftrightarrow \exists \delta > 0$ *tal que* $\forall x \in \left]a - \delta, a + \delta\right[\Longrightarrow f(x) \leq f(a)$. *El máximo local es estricto si $f(x) < f(a)$.*
2. f *tiene un* mínimo relativo o local en $a \Longleftrightarrow \exists \delta > 0$ *tal que* $\forall x \in \left]a - \delta, a + \delta\right[\Longrightarrow f(x) \geq f(a)$ *.El mínimo local es estricto si $f(x) > f(a)$.*
3. f *tiene un* máximo absoluto o global en $a \Longleftrightarrow \forall x \in I \Longrightarrow f(x) \leq f(a)$. *El máximo global es estricto si $f(x) < f(a)$, $\forall x \in I$.*
4. f *tiene un* mínimo absoluto o global en $a \Longleftrightarrow \forall x \in I \Longrightarrow f(x) \geq f(a)$. *El mínimo global es estricto si $f(x) > f(a)$, $\forall x \in I$.*

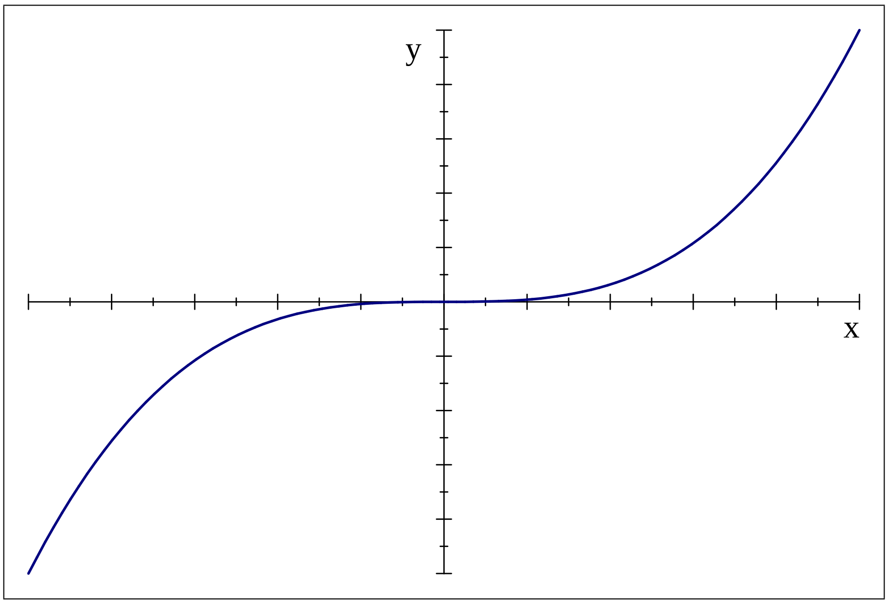
Un punto de máximo o mínimo local se dice que es un *extremo local* de $f(x)$ y un punto de máximo o mínimo global se dice que es un *extremo global.*

Proposición 10.7 *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, y f derivable en x_0, entonces*

$$f \text{ tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Los puntos que cumplen la ecuación $f'(x) = 0$ son los llamados *puntos críticos* de la función $f(x)$, la proposición anterior nos indica que si un punto es un extremo local de una función derivable, entonces es un punto crítico. El teorema nos da condiciones necesarias, que debe cumplir, un punto para ser un extremo local, pero no son suficientes, es decir, hay puntos críticos que no son extremos, por ejemplo la función $f(x) = x^3$ y el punto $x_0 = 0$, está claro que $f'(x) = 3x^2$ y por tanto $f'(0) = 0$, sin embargo se comprueba claramente que no es ni máximo, ni mínimo

$$x^3$$



$$\begin{array}{rcl} f(0) & > & f(x) = x^3, \ \forall x < 0 \\ f(0) & < & f(x) = x^3, \ \forall x > 0 \end{array}$$

Definición 10.5 *Los puntos críticos de una función que no son extremos locales de la misma son* puntos de inflexión.

Para conocer el carácter del punto x_0, se tiene que recurrir al signo de $f'(x)$ cerca del punto x_0, o bien, utilizando derivadas de orden superior.

Teorema 10.8 (Condiciones suficientes) *Sea* $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, y* f *derivable en* $]a, b[$*, con* $x \in]a, b[$ *y supongamos que* $x_0 \in]a, b[$ *que cumple*

$$\begin{array}{rcl} f^{(k)}(x_0) & = & 0 \quad \textit{para } k = 1, \ldots, n-1 \ (n > 1) \\ f^{(n)}(x_0) & \neq & 0 \end{array}$$

entonces

$$\left\{ \begin{array}{ll} n = 2m \ \textit{(n es par)} & \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{(n)}(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \textit{ es un mínimo local estricto de } f(x) \\ \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \textit{ es un máximo local estricto de } f(x) \end{array} \right. \\ \\ n = 2m+1 \ \textit{(n es impar)} & \qquad\qquad \Longrightarrow x_0 \textit{ es un punto de inflexión} \end{array} \right.$$

Ejemplo 10.7 *Encuentra y clasifica los puntos críticos de la función*

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

Solución: Para encontrar los puntos críticos de $f(x)$, tendremos que resolver la ecuación $f'(x) = 0$

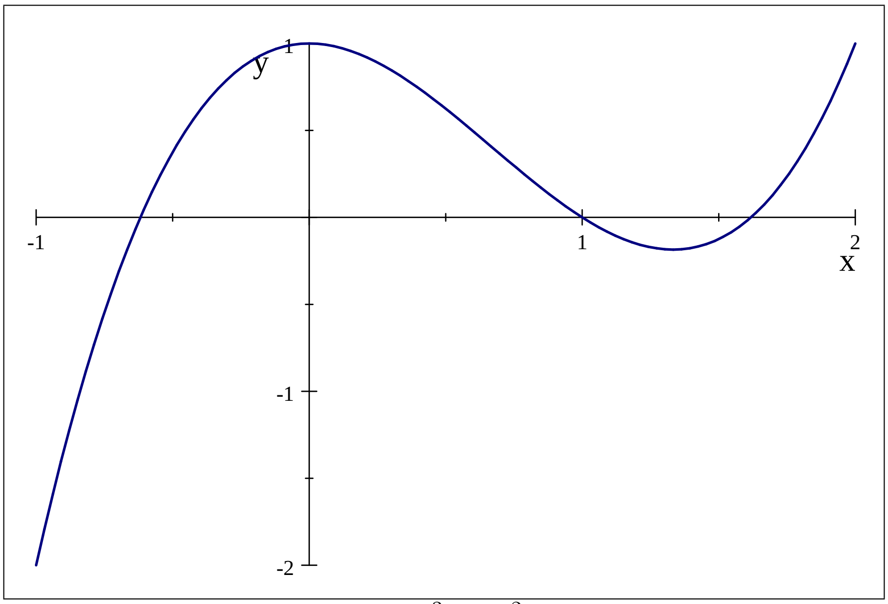
$$3x^2 - 4x = 0 \Longleftrightarrow x(3x - 4) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0 \text{ y } x_2 = \frac{4}{3}$$

Para determinar su condición, recurrimos a la derivada segunda $f''(x) = 6x - 4$

$$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x_1 \text{ es un máximo local estricto}$$

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = 6\frac{4}{3} - 4 = 8 - 4 = 4 > 0 \Rightarrow x_1 \text{ es un mínimo local estricto}$$

En la figura 10.4 vemos una representación de $f(x)$ en el intervalo $[-1, 2]$. Podemos comprobar los extremos locales obtenidos. Notar que la función no tiene ni máximo, ni mínimo global puesto que puede crecer $(x \to \infty)$ y decrecer $(x \to -\infty)$ indefinidamente.



$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Ejemplo 10.8 *Dada*

$$f(x) = \frac{1 + 2x \arctan x}{1 + x^2}$$

calcula los extremos en cada uno de los conjuntos indicados

a) $|x| \leq \frac{1}{2}$ *b)* $|x| \leq 2$ *c)* $\mathbb{R}$

Solución: Calcularemos en primer lugar su derivada

$$f'(x) = \frac{\left(2 - 2x^2\right) \arctan x}{\left(1 + x^2\right)^2}$$

y buscaremos sus puntos críticos

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \left(2 - 2x^2\right) \arctan x = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$$

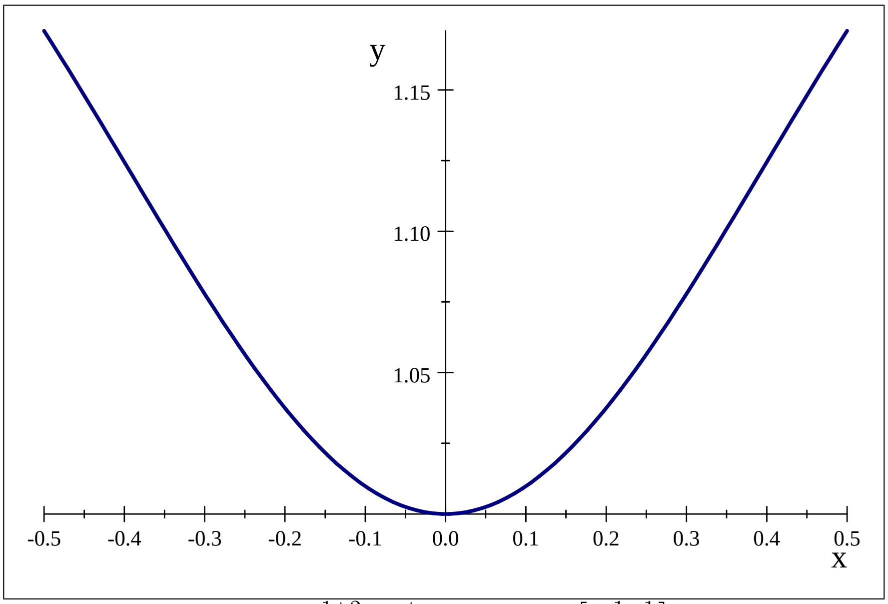
y resolvemos para cada apartado.

1. Vemos que $0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, pero $-1, 1 \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ y calculamos $f(x)$ para $x \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$ que nos da

$$f(0) = 1$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}1709$$

siendo 0 un mínimo y $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ son máximos del intervalo (figura 1)

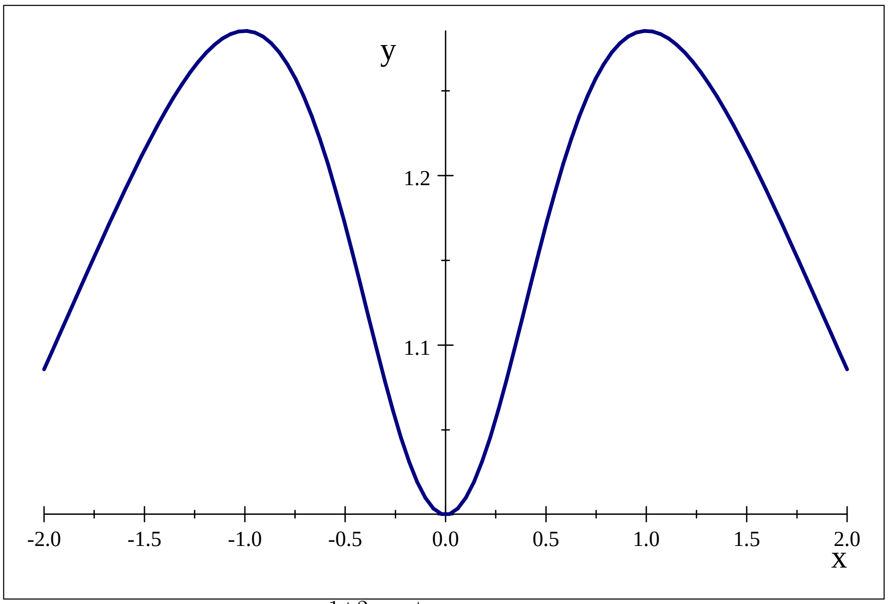


$f(x) = \frac{1+2x\arctan x}{1+x^2}$ con $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2. Vemos que $\{-1, 0, 1\} \in [-2, 2]$, y calculamos $f(x)$ para $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ que nos da

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(-1) &= f(1) = 1{,}285 \\ f(-2) &= f(2) = 1{,}0857 \end{aligned}$$

siendo 0 un mínimo y -1 y 1 los máximos de $f(x)$ en este intervalo (figura 2)

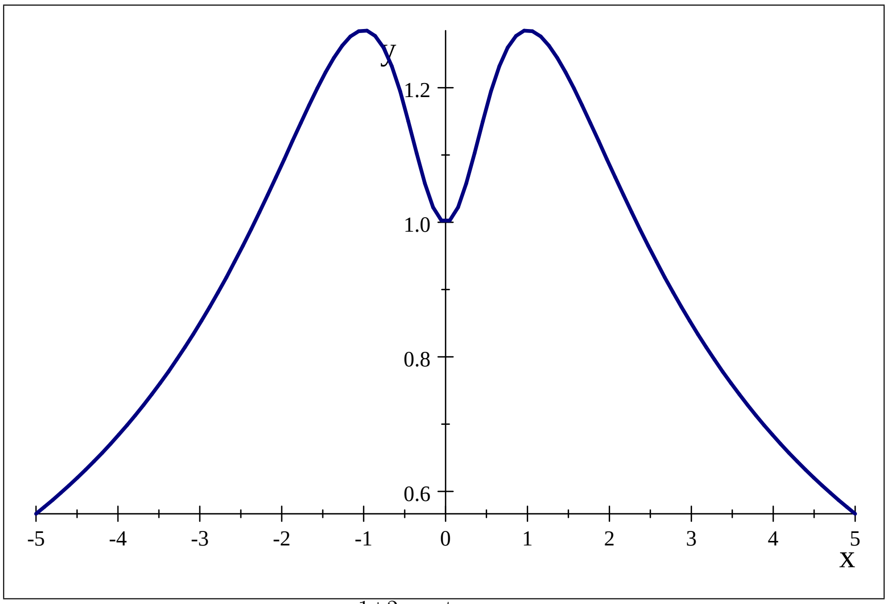


$f(x) = \frac{1+2x\arctan x}{1+x^2}$ con $x \in [-2, 2]$

3. Para ver qué ocurre en $\mathbb{R}$, tenemos que calcular los límites en $-\infty$ e $+\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+2x\arctan x}{1+x^2} = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x\to\infty} \frac{2\arctan x + 2x\frac{1}{1+x^2}}{2x} = \frac{2\frac{\pi}{2}+0}{\infty} = 0$$

luego $f(x)$ tiene máximos en -1 y 1 y no tiene mínimo en este caso (3).



$f(x) = \frac{1+2x\arctan x}{1+x^2}$ con $x \in \mathbb{R}$

10.5. Convexidad

Definición 10.6 *Sea* $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, diremos que* f *es* convexa $\Longleftrightarrow \forall x, y \in [a,b], \lambda \in [0,1] \Longrightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Definición 10.7 *Sea* $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, diremos que* f *es* cóncava $\Longleftrightarrow \forall x, y \in [a,b], \lambda \in [0,1] \Longrightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Proposición 10.9 *Sea* $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, con* $f \in \mathcal{C}^2(]a,b[)$*, es decir* f *con derivadas segundas y continuas, se cumple*

$$f \text{ es convexa} \iff f''(x) \geq 0;\ \forall x \in [a,b]$$

$$f \text{ es cóncava} \iff f''(x) \leq 0;\ \forall x \in [a,b]$$

10.6. Teoremas del valor medio

Teorema 10.10 (de Rolle) *Sea* $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, con* $f \in \mathcal{C}([a,b])$ *y derivable en el intervalo abierto* $]a,b[$*, se cumple*

$$\text{Si } f(a) = f(b) \Longrightarrow \exists \xi \in]a,b[\text{ tal que } f'(\xi) = 0$$

Teorema 10.11 (Valor medio de Cauchy) *Sean* $f, g : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, con* $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ *y derivables en el intervalo abierto* $]a,b[$*, entonces*

$$\exists \xi \in]a,b[\text{ tal que } [f(b) - f(a)]\, g'(\xi) = [g(b) - g(a)]\, f'(\xi)$$

Si además se cumple $g(b) \neq g(a)$ *y* $g'(x) \neq 0;\ \forall x \in]a,b[$ *entonces podemos poner*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

La demostración hace uso del teorema de Rolle y de la función

$$G(x) = [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)] - [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)]$$

como $G(a) = G(b)$ entonces $\exists \xi \in]a,b[$ tal que $G'(\xi) = 0$.

Teorema 10.12 (de Lagrange o de los incrementos finitos) *Sea $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f \in \mathcal{C}([a,b])$ y derivable en el intervalo abierto $]a,b[$, se cumple*

$$\exists \xi \in]a,b[: f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Para la demostración de este teorema se hace uso del teorema del valor medio de Cauchy tomando $g(x) = x$.

Ejemplo 10.9 *Utilizando el teorema de Lagrange, prueba que se cumple la siguiente desigualdad*

$$\tfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \qquad \forall x \geq 0$$

Solución: Aplicamos el teorema de Lagrange a la función $\ln(1+x)$ en el intervalo $[0,x]$, el teorema nos dice que $\exists \xi \in]0,x[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \Rightarrow f(x) - f(0) = f'(\xi)(x-0) \Rightarrow f(x) = f'(\xi)x$$

y como $f(x) = \ln(1+x)$ y $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, obtenemos

$$\ln(1+x) = \tfrac{1}{1+\xi}x \qquad \forall x \in (0,x)$$

Como $\xi \in (0,x)$, entonces

$$\xi > 0 \Longrightarrow 1+\xi > 1 \Longrightarrow \frac{1}{1+\xi} < 1$$

de forma que

$$\ln(1+x) = \frac{1}{1+\xi}x < 1 \cdot x$$

Como $\xi \in (0,x)$, entonces

$$\xi < x \Longrightarrow 1+\xi < 1+x \Longrightarrow \frac{1}{1+\xi} > \frac{1}{1+x}$$

como además $x > 0$

$$\ln(1+x) = \frac{1}{1+\xi}x > \frac{1}{1+x}x$$

Ejemplo 10.10 *Prueba que se cumple la siguiente desigualdad*

$$\sin x < x \qquad \forall x \geq 0$$

Solución: Definimos la función $f(x) = x - \sin x$ cuya derivada es $f'(x) = 1 - \cos x$. Como $f'(x) \geq 0$; $\forall x \geq 0$, la función es creciente si $x \geq 0$, por tanto

$$f(x) \geq f(0) \Longleftrightarrow x - \sin(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \sin(x)$$

Ejemplo 10.11 *Utilizando el teorema de Lagrange, prueba que se cumple la siguiente desigualdad*

$$0 < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Solución: La primera parte es trivial puesto que $\cos x \leq 1$. Para la segunda parte aplicamos el teorema de Lagrange a la función

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1 \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

usando el teorema de Lagrange para la función $f(x)$ y el intervalo $[0, x]$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, teniendo en cuenta que $f'(x) = x - \sin(x)$, debe existir $\xi \in]0, x[$ tal que

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0) \Rightarrow f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0) \Rightarrow f(x) = (\xi - \sin(\xi))\, x$$

como $\xi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \xi > 0$ y usando el problema anterior

$$\xi - \sin(\xi) > 0$$

como además $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces también $x \geq 0$ y por tanto

$$(\xi - \sin(\xi))\, x \geq 0$$

y se prueba que

$$f(x) \geq 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{2} + \cos x - 1 \geq 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{2} \geq 1 - \cos x$$

Ejemplo 10.12 *Utilizando el teorema de Lagrange, prueba que se cumple la siguiente desigualdad*

$$e^x > 1 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Solución: Tomamos $x > 0$ y $f(x) = e^x$ y aplicamos el teorema de Lagrange a $f(x)$ y al intervalo $[0, x] \Rightarrow$ debe existir $\xi \in]0, x[$ tal que

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0) \Rightarrow e^x - 1 = e^{\xi} x$$

Como $\xi \in]0, x[$ y e^x es una función creciente

$$e^x - 1 = xe^{\xi} \geq xe^0 = x \Longrightarrow e^x - 1 \geq x \Longrightarrow e^x \geq x + 1$$

Si tomamos $x < 0$, aplicamos el teorema de Lagrange a $f(x)$ y el intervalo $[x, 0] \Rightarrow$ debe existir $\xi \in]x, 0[$ tal que

$$f(0) - f(x) = f'(\xi)(0 - x) \Rightarrow 1 - e^x = -e^{\xi} x$$

como además $x < 0$, entonces $-x > 0$, como e^x es creciente y $\xi \in]x, 0[$, se cumple $e^{\xi} < e^0$, por tanto

$$(-x)\, e^{\xi} < (-x)$$

y por tanto se cumple

$$1 - e^x = -e^{\xi} x < -x$$

y reagrupando, se prueba que

$$1 + x < e^x$$

10.6.1. Aplicaciones al cálculo de límites: reglas de L'Hôpital

Teorema 10.13 (Primera regla de l'Hôpital) *Sean f, g derivables en $]a-\delta, a+\delta[^*$ con $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, con $g(x) \neq 0$ y $g'(x) \neq 0$ en $]a-\delta, a+\delta[^*$, entonces*

$$\textit{Si existe el límite } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Teorema 10.14 (Segunda regla de l'Hôpital) *Sean f, g derivables en $]a-\delta, a+\delta[^*$ con $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, con $g(x) \neq 0$ y $g'(x) \neq 0$ en $]a-\delta, a+\delta[^*$, entonces*

$$\textit{Si existe el límite } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Ejemplo 10.13 *Calcula los siguientes límites*

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{e^x - 1}$ *2)* $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{3x^3+2x^4}$ *3)* $\lim_{x\to \infty} xe^{-x}$

4) $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x^2-1)}{3-x}$ *5)* $\lim_{x\to 0} (\cos(3x))^{\frac{1}{x^2}}$

Solución: Utilizaremos las reglas de L'Hôpital en cada caso.

1. Se comprueba fácilmente que sustituir directamente la variable x por el valor 0 conduce a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, además el denominador no se anula en ningún punto, salvo en el que estamos calculando el límite, por tanto podemos aplicar la primera regla de L'Hôpital
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{[\sin(3x)]'}{[e^x - 1]'} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x)}{e^x} = 3$$

2. Es el mismo caso que el apartado anterior, el límite es del tipo $\frac{0}{0}$ y aplicamos la primera regla de L'Hôpital
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{3x^3+2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{[x-\sin(x)]'}{[3x^3+2x^4]'} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{9x^2+8x^3}$$
El resultado sigue siendo $\frac{0}{0}$, por tanto podemos seguir aplicando la regla de L'Hôpital
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{9x^2+8x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{[1-\cos x]'}{[9x^2+8x^3]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{18x+24x^2}$$
y volver a aplicarla
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{18x+24x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[18x+24x^2]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{18+48x} = \frac{1}{18}$$

3. Al sustituir directamente vemos que se trata de una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$ y hay que transformarla en cociente para poder aplicar la regla de L'Hôpital. Podemos expresar la función como
$$xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$$
que daría una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, o bien de la forma
$$xe^{-x} = \frac{e^{-x}}{1/x}$$

que nos daría una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

En el primer caso

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

pero en el segundo

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$$

el proceso se complica, por tanto hay que elegir adecuadamente,

4. Directamente obtendremos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, así que aplicamos directamente la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(x^2-1\right)}{3-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left[\ln\left(x^2-1\right)\right]'}{[3-x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0$$

5. Directamente obtendremos la indeterminación 1^{∞}, así que primero aplicamos la función exponencial y logarítmica

$$\lim_{x\to 0} (\cos(3x))^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(\ln\cos(3x))}$$

que la convierte en una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ y podemos aplicar la primera regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(\ln\cos(3x)) = \lim_{x\to 0} \frac{[\ln(\cos(3x))]'}{[x^2]'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3\sin(3x)}{\cos(3x)}}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{3\sin(3x)}{2x\cos(3x)}$$

que es una indeterminación $\frac{0}{0}$ y volvemos a aplicar L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} -\frac{3\sin(3x)}{2x\cos(3x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{[3\sin(3x)]'}{[2x\cos(3x)]'} = \lim_{x\to 0} -\frac{9\cos(3x)}{2\cos(3x)-6x\sin(3x)} = -\frac{9}{2}$$

por tanto

$$\lim_{x\to 0} (\cos(3x))^{\frac{1}{x^2}} = e^{-9/2}$$

Ejemplo 10.14 *Teniendo en cuenta que $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios de grados n y m, respectivamente con*

$$\lim_{x\to\infty} P_n(x) = \lim_{x\to\infty} Q_m(x) = \infty$$

Comprueba que se cumple

$$\begin{aligned} a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{e^{Q_m(x)}} &= 0 \\ b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(P_n(x))}{e^{Q_m(x)}} &= 0 \\ c)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln P_n(x)}{Q_m(x)} &= 0 \end{aligned}$$

10.7. Fórmula de Taylor para funciones de una variable

La idea de esta sección es aproximar una función derivable mediante un polinomio.

Definición 10.8 *Sea $f(x)$ una función que admite derivadas hasta el orden n en un entorno, $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, centrado en el punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Se llama* polinomio de Taylor de $f(x)$ de orden n en el punto x_0 *al polinomio definido como*

$$P_n f(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ejemplo 10.15 *Calcula el polinomio de Taylor de orden 4 en $x_0 = 1$ para la función $\ln(x)$.*

Solución: Como se pide el grado 4, necesitamos calcular la derivada de $f(x)$ hasta ese orden y evaluar dichas derivadas en el punto $x_0 = 1$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\ln(x)$	$\ln(1) = 0$	$\frac{0}{0!} = 0$
1	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{1!} = 1$
2	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{1^2} = -1$	$\frac{-1}{2!} = -\frac{1}{2}$
3	$\frac{2}{x^3}$	$\frac{2}{1^3} = 2$	$\frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
4	$-\frac{6}{x^3}$	$-\frac{6}{1^3} = -6$	$\frac{-6}{4!} = \frac{-6}{24} = -\frac{1}{4}$

y el polinomio solicitado es

$$\begin{aligned} P_4 f(x, 1) &= f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x - 1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x - 1)^4 \\ &= (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 \end{aligned}$$

En general el polinomio y la función solo coincidirán en el punto x_0

$$f(x_0) = P_n f(x, x_0)$$

pero no en otro punto$P_n f(x, x_0)$, consideramos por tanto la diferencia entre la función y el polinomio, que llamaremos *resto de Taylor*

$$R_n f(x, x_0) = f(x) - P_n f(x, x_0)$$

Proposición 10.15 *Si $f(x)$ es una función que admite derivadas hasta el orden $n+1$ en un intervalo centrado en el punto $x_0 \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ Para cada x en dicho intervalo, existe un punto ξ entre dicho valor x y a (si $x < a \Rightarrow \xi \in [x, a]$ y si $x > a \Rightarrow \xi \in [a, x]$) tal que*

$$R_n f(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

con

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n f(x,x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$$

esta expresión es el llamado forma de Lagrange del resto de Taylor.

En la proposición anterior hay que tener en cuenta que el punto ξ depende del valor x elegido, es decir, $\xi \equiv \xi(x)$.

Definición 10.9 *Llamamos* fórmula de Taylor *de orden n para $f(x)$ en x_0 a:*

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n f(x,x_0) + R_n f(x,x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n f(x,x_0) \end{aligned}$$

Si $x_0 = 0$, tenemos la fórmula de McLaurin

$$f(x) = P_n f(x,0) + R_n f(x,0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n f(x,x_0)$$

Ejemplo 10.16 *Calcula el polinomio de Taylor de orden n en $x_0 = 0$ para las siguientes funciones indicando su resto de Lagrange*

a) $f(x) = e^x$ *b)* $f(x) = \ln(1+x)$

c) $f(x) = \cos(x)$ *d)* $f(x) = \sin(x)$

e) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *f)* $f(x) = \frac{1}{1+x}$

Solución: Necesitamos calcular la derivadas de $f(x)$ hasta el orden n

1. En la tabla siguiente expresamos las derivadas hasta el orden n y en la última fila incluimos la derivada $(n+1)$–ésima evaluada en el punto ξ

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	e^x	$e^0 = 1$	$\frac{1}{0!}$
1	e^x	$e^0 = 1$	$\frac{1}{1!}$
2	e^x	$e^0 = 1$	
3	e^x	$e^0 = 1$	$\frac{1}{3!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	e^x	$e^0 = 1$	$\frac{1}{n!}$
$n+1$		e^ξ	$\frac{e^\xi}{(n+1)!}$

y la fórmula de Taylor es

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

2. En la tabla siguiente expresamos las derivadas hasta el orden n y en la última fila incluimos la derivada $(n+1)$–ésima evaluada en el punto ξ

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\ln(1+x)$	0	$\frac{0}{0!} = 0$
1	$\frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1}$	1	$\frac{1}{1!} = 1$
2	$(-1)(1+x)^{-2}$	-1	$\frac{-1}{1!} = -1$
3	$(-1)(-2)(1+x)^{-3}$	$(-1)^2\,2$	$\frac{(-1)^2\,2!}{3!} = \frac{1}{3}$
4	$(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$	$(-1)^3\,3!$	$\frac{(-1)^3\,3!}{4!} = -\frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	$(-1)(-2)(-3)\cdots(-n+1)(1+x)^{-n}$	$(-1)^n(n-1)!$	$\frac{(-1)^n}{n}$
$n+1$	$(-1)(-2)(-3)\cdots(-n+1)(-n)(1+x)^{-n-1}$	$\frac{(-1)^{n+1}\,n!}{(1+\xi)^{n+1}}$	$\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$

y la fórmula de Taylor es

$$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n}x^n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}$$

3. En la tabla siguiente expresamos las derivadas de la función $\cos(x)$. Como se puede apreciar las derivadas pares son funciones $\cos(x)$ y van alternándose en signo, mientras que las derivadas pares son funciones de tipo $\sin(x)$ y también van alternándose en signo. Al evaluar las primeras

en el punto $x_0 = 0$, obtendremos el valor $(-1)^n$, mientras que las segundas serán siempre 0.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\cos(x)$	$\cos(0) = 1$	$\dfrac{1}{0!} = 1$
1	$-\sin(x)$	$-\sin(0) = 0$	$\dfrac{0}{1!} = 0$
2	$-\cos(x)$	$-\cos(0) = -1$	$\dfrac{-1}{2!} = -\dfrac{1}{2!}$
3	$\sin(x)$	$\sin(0) = 0$	$\dfrac{0}{3!} = 0$
4	$\cos(x)$	$\cos(0) = 1$	$\dfrac{1}{4!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2n$	$(-1)^n \cos x$	$(-1)^n \cos 0 = (-1)^n$	$\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$
$2n+1$	$(-1)^{n+1} \sin x$	$(-1)^n \sin 0 = 0$	0
$2n+2$	$(-1)^{n+1} \cos x$	$(-1)^{n+1} \cos \xi$	$\dfrac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+2)!}$

y la fórmula de Taylor sería

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

4. Para calcular la fórmula de Taylor de la función $\sin(x)$, haremos uso de la que ya hemos calculado para $\cos(x)$ puesto que la derivada del $\cos x$ es el $-\sin x$, de modo que si tomamos la fórmula de Taylor de $\cos(x)$ y calculamos su derivada obtendremos $-\sin x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right)' \\ &= \left(0 - \frac{1}{2!}2x + \frac{1}{4!}4x^3 - \frac{1}{6!}6x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}2nx^{2n-1}\right) + \left(\frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right)' \\ &= \left(0 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}\right) + \left(\frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right)' \end{aligned}$$

y si ahora cambiamos el signo tendremos

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1} - \left(\frac{(-1)^{n+1} \cos \xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right)'$$

El resto no tiene la misma expresión que se obtendría de forma directa y que sería

$$\frac{(-1)^{n+1} \sin \xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

5. Construimos la tabla correspondiente

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\frac{1}{(1-x)} = (1-x)^{-1}$	1	$\frac{1}{0!} = 1$
1	$(1-x)^{-2}$	1	$\frac{1}{1!} = 1$
2	$2(1-x)^{-3}$	$2!$	$\frac{2!}{2!} = 1$
3	$2 \cdot 3 (1-x)^{-4}$	$3!$	$\frac{3!}{3!} = 1$
4	$2 \cdot 3 \cdot 4 (1-x)^{-5}$	$4!$	$\frac{4!}{4!} = 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	$2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n (1-x)^{-n-1}$	$n!$	$\frac{n!}{n!} = 1$
$n+1$	$2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1)(1-x)^{-n-2}$	$\frac{(n+1)!}{(1-\xi)^{n+2}}$	$\frac{1}{(1+\xi)^{n+2}}$

y la fórmula de Taylor es

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots x^n + \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}}$$

6. Para la fórmula de Taylor de $\frac{1}{1+x}$ expresaremos la función de como $\frac{1}{1-(-x)}$ y hacemos uso de la fórmula anterior

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \cdots (-x)^n + \frac{(-x)^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}} \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}} \end{aligned}$$

10.7.1. Aplicación de la fórmula de Taylor para aproximación de funciones

Ejemplo 10.17 *Calcula* $\cos(1)$*, aproximando la función* $f(x) = \cos(x)$ *por su polinomio de Taylor de grado 4 en el punto* $x_0 = 0$ *y acota el error obtenido. Aunque la tabla para el polinomio de Taylor se ha realizado en el apartado anterior, procederemos desde el principio construyendo el polinomio de* *grado 4 y el término del error*

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\cos(x)$	$\cos(0) = 1$	$\frac{1}{0!} = 1$
1	$-\sin(x)$	$-\sin(0) = 0$	$\frac{0}{1!} = 0$
2	$-\cos(x)$	$-\cos(0) = -1$	$\frac{-1}{2!} = -\frac{1}{2!}$
3	$\sin(x)$	$\sin(0) = 0$	$\frac{0}{3!} = 0$
4	$\cos(x)$	$\cos(0) = 1$	$\frac{1}{4!}$
5	$-\sin x$	$-\sin(\xi)$	$\frac{-\sin(\xi)}{5!}$

el polinomio de Taylor sería

$$P_4 f(x,0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

y la expresión del error es

$$R_4 f(x,0) = -\frac{\sin\xi}{5!}x^5$$

El valor del polinomio en el punto 1 *es*

$$P_4 f(1,0) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} = 0{,}541\,67$$

mientras que el error cometido en ese punto sería

$$R_4 f(1,0) = -\frac{\sin\xi}{5!}$$

como no conocemos el valor de ξ, no conoceremos el verdadero valor del error, pero sí podemos encontrar una cota que nos indique el máximo error que vamos a obtener, como el error se puede cometer por exceso o por defecto tomaremos su valor absoluto

$$|R_4 f(1,0)| = \left|-\frac{\sin\xi}{5!}\right|$$

y si recordamos que la función $\sin x$ *toma valores entre* -1 *y* 1*, es decir, está acotada por* 1*, obtendremos*

$$\left|-\frac{\sin\xi}{5!}\right| \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 8.\,333\,3\times 10^{-3}$$

Para comprobar si esta cota de error es correcta, calcularemos el valor de $\cos(1)$

$$\cos(1) = 0{,}5403023058681398$$

y comparando con el valor obtenido mediante el polinomio

$$|\cos(1) - P_4 f(1,0)| = |0{,}5403023058681398 - 0{,}541\,67| = 1.\,367\,7\times 10^{-3}$$

que como vemos es menor que la cota de error dada.

Ejemplo 10.18 *Calcula* $\ln(1{,}2)$*, aproximando la función* $f(x) = \ln(x)$ *por su polinomio de Taylor de grado* 4 *en el punto* $x_0 = 1$ *y acota el error obtenido. Aunque la tabla para el polinomio de Taylor se ha realizado anteriormente, procederemos desde el principio construyendo el polinomio de grado* 4 *y el término del error*

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\ln(x)$	$\ln(1) = 0$	$\dfrac{0}{0!} = 0$
1	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{1} = 1$	$\dfrac{1}{1!} = 1$
2	$\dfrac{-1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{1^2} = -1$	$\dfrac{-1}{2!} = -\dfrac{1}{2}$
3	$\dfrac{2}{x^3}$	$\dfrac{2}{1^3} = 2$	$\dfrac{2}{3!} = \dfrac{1}{3}$
4	$\dfrac{-6}{x^4}$	$-\dfrac{6}{1^4} = -6$	$\dfrac{-6}{4!} = -\dfrac{1}{4}$
5	$\dfrac{-24}{x^5}$	$\dfrac{-24}{\xi^5}$	$\dfrac{-24}{\xi^5 5!} = \dfrac{-1}{5\xi^5}$

el polinomio de Taylor sería

$$P_4 f(x, 0) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

y la expresión del error es

$$R_4 f(x, 1) = -\frac{1}{5\xi^5}(x-1)^5$$

El valor del logaritmo en el punto 1,2 *se obtiene al evaluar el polinomio en el punto* 1,2

$$P_4 f(1{,}2, 0) = (1{,}2 - 1) - \frac{(1{,}2-1)^2}{2} + \frac{(1{,}2-1)^3}{3} - \frac{(1{,}2-1)^4}{4} = 0{,}182\,27$$

mientras que el error cometido en ese punto sería

$$R_4 f(1{,}2, 0) = -\frac{1}{5\xi^5}(1{,}2-1)^5 = -\frac{1}{5\xi^5}\left(\frac{2}{10}\right)^5 = -\frac{32}{500000}\frac{1}{\xi^5}$$

como de nuevo no conocemos el valor de ξ*, no sabremos el verdadero valor del error, pero sí podemos encontrar una cota que nos indique el máximo error que vamos a obtener, como el error se puede cometer por exceso o por defecto tomaremos su valor absoluto*

$$|R_4 f(1{,}2, 0)| = \left|-\frac{32}{500000}\frac{1}{\xi^5}\right|$$

En este caso la función $\frac{1}{x^5}$ *es decreciente puesto que su derivada es* $-\frac{5}{x^6} < 0$*, como además* ξ *es un punto que está entre* $x_0 = 1$ *y* 1,2*, el valor más grande se obtendrá en el extremo inferior del intervalo* $[1, 1{,}2]$ *por tanto podemos poner*

$$|R_4 f(1{,}2, 0)| = \left|-\frac{32}{500000}\frac{1}{\xi^5}\right| < \frac{32}{500000} = 6.4 \times 10^{-5}$$

De nuevo vamos a comprobar que la cota de error es correcta, calcularemos el valor de $\ln(1{,}2)$

$$\ln(1{,}2) = 0{,}182\,32$$

y si comparamos con el valor obtenido mediante el polinomio

$$|\ln(1{,}2) - P_4 f(1{,}20)| = |0{,}182\,32 - 0{,}182\,27| = 0{,}000\,05 = 5 \times 10^{-5}$$

que como vemos es menor que la cota de error dada.

10.7.2. Aplicación de la fórmula de Taylor al cálculo de límites

Definición 10.10 *Diremos que una función* $f : I \subseteq R \longrightarrow R$*, admite* desarrollos limitados *de orden* n *en* $x_0 \in I \Longleftrightarrow$ *Existe un polinomio de grado* n *tal que* $\forall x \in I$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + +a_n(x - x_0)^n$$

derivadas hasta el orden n *en el punto* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Se llama* polinomio de Taylor de $f(x)$ de orden n en el punto x_0 *al polinomio definido como*

$$P_n f(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

siendo el término $o((x - x_0)^n)$ *una función que cumple*

$$\lim_{x \to x_0} o((x - x_0)^n) = 0$$

y

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0$$

La función $o((x - x_0)^n)$ *es llamado un* infinitésimo de *orden superior a* $(x - x_0)^n$*.*

Proposición 10.16 *Si* f, g *admiten desarrollos limitados de orden* n *en el punto* x_0 *con* $p(x)$ *y* $q(x)$ *sus respectivos polinomios, entonces*

1. *La función* $f + g$ *admite desarrollos limitados de orden* n *con polinomio* $p(x) + q(x)$*.*
2. *La función* $f - g$ *admite desarrollos limitados de orden* n *con polinomio* $p(x) - q(x)$*.*
3. *La función* $f \cdot g$ *admite desarrollos limitados de orden* n *con polinomio* $r(x)$ *obtenido al obtener* $p(x) \cdot q(x)$ *y eliminando aquellos términos con grado* $> n$*.*
4. *Si* $g(x_0) \neq 0$*, entonces* $\dfrac{f}{g}$ *admite desarrollo limitados en* 0 *de orden* n*, obtenida al dividir* $p(x)/q(x)$ *ordenados según potencias crecientes de* x *hasta el grado* n*.*

Ejemplo 10.19 *Calcula el siguiente límite mediante L'Hôpital y mediante desarrollos limitados*

$$\lim_{x \to \infty} x\left(\cos\frac{1}{x} - e^{2/x}\right)$$

Solución: Para usar L'Hôpital tenemos que expresar el límite en forma de cociente, puesto que directamente obtrenemos

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\cos\frac{1}{x}-e^{2/x}\right)=\infty\,(1-1)=\infty\cdot 0$$

que es una indeterminación. Tomamos el factor x y lo pasamos al denominador dividiendo, de este modo

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\cos\frac{1}{x}-e^{2/x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\cos\frac{1}{x}-e^{2/x}\right)}{1/x}=\frac{0}{0}$$

Podemos aplicar L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\cos\frac{1}{x}-e^{2/x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}e^{2/x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(-\sin\frac{1}{x}-2e^{2/x}\right)=-2$$

Si usamos desarrollos limitados, en primer lugar haremos el cambio

$$\frac{1}{y}=x$$

de modo que si $y\to\infty$, entonces $x\to 0$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\cos\frac{1}{x}-e^{2/x}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\cos y-e^{2y}\right)$$

y a continuación utilizamos los desarrollos de Taylor de las funciones implicadas

$$\cos y=1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\cdots$$

$$e^{2y}=\sum\frac{(2y)^k}{k!}=1+\frac{2y}{1!}+\frac{(2y)^2}{2!}+\cdots$$

y por tanto

$$\cos y-e^{2y}=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}\right)-\left(1+\frac{2y}{1!}+\frac{(2y)^2}{2!}\right)=-2y-\frac{5}{2}y^2+\frac{1}{24}y^4-\frac{1}{720}y^6$$

y sustituyendo en el límite

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\cos y-e^{2y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\left(-2y-\frac{5}{2}y^2+\frac{1}{24}y^4-\frac{1}{720}y^6\right)}{y}=\lim_{y\to 0}-2-\frac{5}{2}y+\frac{1}{24}y^3-\frac{1}{720}y^5=-2$$

como antes.

Ejemplo 10.20 *Calcula el siguiente límite*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^2\left(2-2\cos x-x^2e^x\right)}$$

Solución: El problema habitual de los problemas de cálculo de límites con desarrollos limitados es decidir en qué termino cortar, ya que algunas veces puede impedir la resolución del problema por falta de términos y otras hay un exceso de términos que puede implicar un cálculo excesivo. Por ejemplo, supongamos que elegimos los desarrollos limitados de las funciones que aparecen en el limite anterior hasta el tercer orden. Es decir

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} \\ e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \end{aligned}$$

y si sustituimos en la función

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^2\left(2 - 2\cos x - x^2 e^x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - x + \frac{x^3}{6}}{x^2\left(2 - 2\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) - x^2\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3\right)\right)} = \frac{0}{0}$$

se necesitan términos de orden superior, tomaremos el siguiente $n = 5$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\ e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \end{aligned}$$

y si ahora sustituimos

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^2\left(2 - 2\cos x - x^2 e^x\right)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) - x + \frac{x^3}{6}}{x^2\left(2 - 2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) - x^2\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4\right)\right)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{120}x^5}{-\frac{1}{24}x^8 - \frac{1}{6}x^7 - \frac{7}{12}x^6 - x^5} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{120}}{-\frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{12}x - 1} = -\frac{1}{120} \end{aligned}$$

Ejemplo 10.21 *Encuentra el polinomio de Taylor de grado 2 para*

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

utiliza dicho pollinomio para calcular el valor aproximado de la siguiente integral

$$\int_0^{0,5} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

Solución: En la tabla siguiente expresamos las derivadas de $f(x)$ hasta el orden 2, incluimos la derivada tercera para encontrar el error cometido

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$	0	0
1	$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = \left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{2}}$	1	1
2	$-\frac{3x^2}{2}\left(1+x^3\right)^{-\frac{3}{2}}$	0	0
3	$-3x\left(1+x^3\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{27}{2}x^4\left(1+x^3\right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3x\left(5x^3-4\right)}{4(1+x^3)^{5/2}}$	$\frac{3\xi\left(5\xi^3-4\right)}{4\left(1+\xi^3\right)^{5/2}}$	$\frac{3\xi\left(5\xi^3-4\right)}{4\left(1+\xi^3\right)^{5/2}}\frac{1}{3!}$

y el polinomio de Taylor será

$$T_2 f(x;0) = x$$

mientras que el término del error o resto sería

$$\left|R_4 f'''(x,0)\right| = \left|\frac{\xi\left(5\xi^3-4\right)}{8\left(1+\xi^3\right)^{5/2}}x^3\right|$$

En el caso de $x = 0{,}5$ el valor que arroja el polinomio de Taylor es

$$T_2 f\left(\frac{1}{2};0\right) = \frac{1}{2}$$

mientras que una cota del error cometido vendría dada por la expresión

$$\left|R_4 f'''\left(\frac{1}{2},0\right)\right| = \left|\frac{\xi\left(5\xi^3-4\right)}{8\left(1+\xi^3\right)^{5/2}}\frac{1}{2^3}\right| = \left|\frac{\xi\left(5\xi^3-4\right)}{64\left(1+\xi^3\right)^{5/2}}\right| = \frac{1}{64}\left|\frac{\xi\left(5\xi^3-4\right)}{\left(1+\xi^3\right)^{5/2}}\right|$$

En todos estos ejemplos se conocía el grado del polinomio, y por tanto la derivada, que se tiene que utilizar. Otro tipo de problemas que se plantea es cuando sólo conocemos el error máximo que se debe cometer y por tanto en este caso no conocemos dónde truncar la serie de Taylor.

Ejemplo 10.22 *Calcula* $\ln(1{,}2)$ *con un error menor que* 10^{-2}

Solución: Tendremos que calcular el polinomio de Taylor de $\ln(1+x)$ necesario para tener ese error. Si el polinomio es

$$\log(1+x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n f(x,x_0)$$

tenemos que saber en que valor de n tenemos que truncar. Para ello usaremos el resto de Lagrange, primero calculamos la derivada n–ésima de f

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$\ln(1+x)$	0	$\dfrac{0}{0!}=0$
1	$(1+x)^{-1}$	1	1
2	$-(1+x)^{-2}$	-1	-1
3	$2(1+x)^{-3}$	$(-1)^2 2$	$\dfrac{1}{3}$
4	$-3!(1+x)^{-4}$	$(-1)^3 3!$	$-\dfrac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$(-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$	$(-1)^{n+1}(n-1)!$	$(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

por tanto el resto sería

$$R_n f(x,0)=\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}\Rightarrow |R_n f(x,0)|=\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

y para $x=0{,}2=\frac{2}{10}$ tendríamos

$$\left|R_n f\left(\frac{2}{10},0\right)\right|=\frac{2^{n+1}}{10^{n+1}(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

con

$$0\le\xi\le 0{,}2$$

por tanto

$$1+\xi\ge 1\Longleftrightarrow(1+\xi)^{n+1}\ge 1\Longleftrightarrow\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}\le 1$$

por tanto

$$\left|R_n f\left(\frac{2}{10},0\right)\right|=\frac{2^{n+1}}{10^{n+1}(n+1)(1+\xi)^{n+1}}\le\frac{2^{n+1}}{10^{n+1}(n+1)}$$

Si tomamos

$$\frac{2^{n+1}}{10^{n+1}(n+1)}\le 10^{-2}$$

garantizaremos que el error en el polinomio de Taylor es menor que el solicitado. Para obtener el valor de n, le vamos dando valores

n	$\frac{2^{n+1}}{10^{n+1}(n+1)}$
1	$\frac{2^2}{2\cdot 10^2}=0{,}02\ge 10^{-2}$
2	$\frac{2^3}{3\cdot 10^3}=2.6667\times 10^{-3}<10^{-2}$

luego $n=2$ y el polinomio será

$$\ln(1+x)\simeq\ln(1)+\frac{1}{1}x-\frac{1}{2}x^2$$

y calcularemos

$$\ln(1{,}2) = 0{,}2 - \frac{1}{2}(0{,}2)^2 = 0{,}2 - 0{,}02 = 0{,}18$$

Ejemplo 10.23 *Calcula* $e^{-0{,}3}$ *con un error menor que* 10^{-3}

Solución: Tendremos que calcular el polinomio de Taylor de e^x necesario para tener ese error. Si el polinomio es

$$e^x = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n f(x, x_0)$$

tenemos que saber en que valor de n tenemos que truncar. Para ello usaremos el resto de Lagrange, primero calculamos la derivada n–ésima de f

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	e^x	1	1
1	e^x	1	1
2	e^x	1	$\frac{1}{2!}$
3	e^x	1	$\frac{1}{3!}$
4	e^x	1	$\frac{1}{4!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	e^x	1	$\frac{1}{n!}$

por tanto el resto sería

$$R_n f(x,0) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \Rightarrow |R_n f(x,0)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

y para $x = -0{,}3 = -\frac{3}{10}$ tendríamos

$$\left|R_n f\left(-\frac{3}{10}, 0\right)\right| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\frac{3^{n+1}}{10^{n+1}}$$

con

$$-0{,}3 \le \xi \le 0$$

por tanto

$$e^\xi \le e^0 = 1$$

por tanto

$$\left|R_n f\left(-\frac{3}{10}, 0\right)\right| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\frac{3^{n+1}}{10^{n+1}} \le \frac{1}{(n+1)!}\frac{3^{n+1}}{10^{n+1}}$$

Si tomamos

$$\frac{1}{(n+1)!}\frac{3^{n+1}}{10^{n+1}} \le 10^{-3}$$

garantizaremos que el error en el polinomio de Taylor es menor que el solicitado. Para obtener el valor de n, le vamos dando valores

$$\begin{array}{ll}
n & \frac{1}{(n+1)!}\frac{3^{n+1}}{10^{n+1}} \\
1 & \frac{1}{(1+1)!}\frac{3^{1+1}}{10^{1+1}} = 0{,}045 \ > 10^{-3} \\
2 & \frac{1}{(2+1)!}\frac{3^{2+1}}{10^{2+1}} = \frac{9}{2000} : 0{,}004\,5 > 10^{-3} \\
3 & \frac{1}{(3+1)!}\frac{3^{3+1}}{10^{3+1}} = \frac{27}{80\,000} : 3.\,375 \times 10^{-4} < 10^{-3}
\end{array}$$

luego $n = 3$ y el polinomio será

$$e^x \simeq 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$$

y calcularemos

$$e^{-0,3} = 1 - 0{,}3 + \frac{1}{2!}(-0{,}3)^2 + \frac{1}{3!}(-0{,}3)^3 = 0{,}740\,5$$