Capítulo 11

Cálculo de primitivas

11.1. Primitivas o integrales indefinidas

Definición 11.1 *Sea* $\dot{f}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *diremos que* $F: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *es una primitiva de* $f \Longleftrightarrow F$ *es derivable en* I *y* $F'(x) = f(x)$.

A continuación se da una tabla con primitivas inmediatas, se prescinde de la constante de integración

Función	Primitivas	Función	Primitiva
$x^\alpha, \alpha \neq 1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$f(x)^n f'(x), \alpha \neq 1$	$\dfrac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
e^x	e^x	$f'(x)\, e^{f(x)}$	$e^{f(x)}$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$f'(x)\, a^{f(x)}$	$\dfrac{a^{f(x)}}{\ln a}$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$f'(x) \cos f(x)$	$\operatorname{sen} f(x)$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	$f'(x) \operatorname{sen} f(x)$	$-\cos f(x)$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$\tan x$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = f'(x) \sec^2 f(x)$	$\tan f(x)$
$\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$	$\operatorname{cotan} x$	$\dfrac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)} = f'(x) \operatorname{cosec}^2 f(x)$	$\operatorname{cotan} f(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$\operatorname{arcsen} f(x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$\arctan f(x)$
$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x$	$f'(x) \operatorname{Ch} f(x)$	$\operatorname{Sh} f(x)$
$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x$	$f'(x) \operatorname{Sh} f(x)$	$\operatorname{Ch} f(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\arg \operatorname{Sh} x$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2+1}}$	$\arg \operatorname{Sh} f(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\arg \operatorname{Ch} x$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-1}}$	$\arg \operatorname{Ch} f(x)$

Ejemplo 11.1 *Calcula las siguientes primitivas inmediatas*

$$a)\int \operatorname{sen}(3x)\,dx \qquad b)\int 2^{3x}dx$$

$$c)\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}dx \qquad d)\int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$e)\int \frac{1}{1+3x^2}dx \qquad f)\int \frac{x}{1+x^4}dx$$

$$g)\int \frac{dx}{\sqrt{1+3x^2}} \qquad h)\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$$

Solución:

$$a)\int \operatorname{sen}(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int 3\operatorname{sen}(3x)\,dx = -\frac{\cos(3x)}{3}$$

$$b)\int 2^{3x}dx = \int 8^x dx = \frac{8^x}{\ln 8} = \frac{2^{3x}}{3\ln 2}$$

$$c)\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{3}x\right)^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{3}x\right)$$

$$d)\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

$$e)\int \frac{1}{1+3x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}x\right)$$

$$f)\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\arctan x^2$$

$$g)\int \frac{1}{\sqrt{1+3x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arg\,Sh}\left(\sqrt{3}x\right)$$

$$h)\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{1/2}dx + \int x^{-1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^{1/2}$$

Ejercicio 11.1 *Calcula las siguientes integrales inmediatas*

a) $\int x dx$ b) $\int 2x dx$ c) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx$

d) $\int 3x^2 dx$ e) $\int \left(3x^3-7x-2\right)dx$ f) $\int x^5 dx$

11.2. Métodos de integración

11.2.1. Cambio de variable

Si podemos hacer un cambio del tipo $x = g(t)$ entonces

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

Ejemplo 11.2 *Calcula las siguientes primitivas mediante el cambio de variable adecuado*

$$a)\int x \operatorname{sen}\left(3x^2\right)dx \qquad b)\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$$

$$c)\int x\sqrt{3x-4}dx \qquad d)\int xe^{-x^2/2}dx$$

Solución:

$$\text{a)}\int x \operatorname{sen}\left(3x^2\right)dx \quad \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = t \\ \\ 6xdx = dt \Rightarrow xdx = \dfrac{1}{6}dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\int \operatorname{sen}(t)\,dt = -\frac{1}{6}\cos(t)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6}\cos\left(3x^2\right)$$

$$\text{b)}\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \quad \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 \Rightarrow \sqrt{x} = t \\ \\ dx = 2tdt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2t^2}{1+t}dx = t^2 - t + \ln|1+t| + C$$

$$\Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 2\ln|1+\sqrt{x}|$$

$$\text{c)}\int x\sqrt{3x-4}dx = \quad \Rightarrow \begin{cases} 3x-4 = t^2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}\left(t^2+4\right) \\ \\ dx = \dfrac{2}{3}tdt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9}\int t^2\left(t^2+4\right)dt = \tfrac{2}{45}t^5 + \tfrac{8}{27}t^3$$

$$\Rightarrow \tfrac{2}{45}(3x-4)^{5/2} + \tfrac{8}{27}(3x-4)^{3/2}$$

$$\text{d)} \int xe^{-x^2/2}dx = \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} = t \\ \\ xdx = dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int e^{-t}dt = -e^{-t}$$

$$\Rightarrow -e^{-x^2/2}$$

Algunos cambios de variable

- Para funciones del tipo
$$\int R\left(a^x\right)dx$$
donde $R\left(x\right)$ es una función racional, se propone el cambio $t = a^x$.
- Para funciones del tipo
$$\int R\left(\arcsin x\right)dx$$
donde $R\left(x\right)$ es una función racional, se propone el cambio $t = \arcsin x$.
- Para funciones del tipo
$$\int R\left(\arctan x\right)dx$$
donde $R\left(x\right)$ es una función racional, se propone el cambio $t = \arctan x$.
- Para funciones del tipo
$$\int R\left(\tan x\right)dx$$
donde $R\left(x\right)$ es una función racional, se propone el cambio $t = \tan x$.

11.2.2. Integración por partes

Usando la definición de derivada de un producto

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

podemos reagrupar términos e integrar

$$\int u \cdot v' = \int (u \cdot v)' - \int \left(u' \cdot v\right) = (u \cdot v) - \int \left(u' \cdot v\right)$$

Ejemplo 11.3 *Calcula las siguientes primitivas mediante la integración por partes*

$$\textit{a)} \int x \ln\left(1 + x^2\right)dx \qquad \textit{b)} \int \arctan x dx$$

$$\textit{c)} \int \ln\left(1 + x^2\right)dx \qquad \textit{d)} \int x^2 e^x dx$$

Solución

a) $\displaystyle\int x\ln\left(1+x^2\right)dx$ $\Rightarrow \begin{cases} u=\ln\left(1+x^2\right)\Rightarrow u'=\frac{2x}{1+x^2}dx \\ v'=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

b) $\displaystyle\int \arctan x dx=$ $\Rightarrow \begin{cases} u=\arctan x\Rightarrow u'=\frac{1}{1+x^2}dx \\ v'=dx\Rightarrow v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\arctan x-\tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

:

c) $\displaystyle\int \ln\left(1+x^2\right)dx=$ $\Rightarrow \begin{cases} u=\ln\left(1+x^2\right)\Rightarrow u'=\frac{2x}{1+x^2}dx \\ v'=dx\Rightarrow v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow x\ln\left(1+x^2\right)-2\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=x\ln\left(1+x^2\right)-2\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$\Rightarrow x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\arctan x$$

d) $\displaystyle\int x^2e^xdx=$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=x^2\Rightarrow u'=2xdx \\ v'=e^xdx\Rightarrow v=e^x\end{cases}\Rightarrow x^2e^x-2\int xe^xdx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=x\Rightarrow u'=dx \\ v'=e^xdx\Rightarrow v=e^x\end{cases}\Rightarrow x^2e^x-2\left(xe^x-\textstyle\int e^xdx\right)=\left(x^2-2x-2\right)e^x$$

11.2.3. Funciones racionales

Integrales del tipo:

$$\int\frac{P_n\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)}dx=\int\frac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\cdots b_1x+b_0}dx$$

donde $P_n\left(x\right)$ y $Q_m\left(x\right)$ son polinomios con coeficientes reales. Podemos suponer que $m>n$, ya que en caso contrario podríamos realizar la división polinomial

$$\frac{P_n\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)}=C\left(x\right)+\frac{R_p\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)}$$

siendo p el grado de $R\left(x\right)$ menor que m. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $b_m=1$. Distinguiremos varios casos:

1. El polinomio $Q_m(x)$ tiene m raíces reales y distintas

$$Q_m(x) = x^m + \cdots b_1 x + b_0 = (x - r_1) \cdots (x - r_m)$$

realizamos la descomposición en fracciones simples

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x - r_1)} + \cdots + \frac{A_m}{(x - r_m)}$$

donde los coeficientes A_k se obtienene sumando las fracciones a la derecha e igualando los numeradores. A continuación se integra cada sumando

$$\begin{aligned} \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx &= \int \left(\frac{A_1}{(x - r_1)} + \cdots + \frac{A_m}{(x - r_m)} \right) dx \\ &= \int \frac{A_1}{(x - r_1)} dx + \cdots + \int \frac{A_m}{(x - r_m)} dx \\ &= A_1 \ln|x - r_1| + \cdots + A_m \ln|x - r_m| \end{aligned}$$

Por ejemplo supongamos

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx$$

en este caso

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) \Rightarrow \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{(x - 1)(x - 3)}$$

y por tanto la descomposición en fracciones simples será

$$\frac{1}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{A_1}{(x - 1)} + \frac{A_2}{(x - 3)} = \frac{A_1(x - 3) + A_2(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)}$$

e igualando los numeradores de ambas fracciones

$$1 = A_1(x - 3) + A_2(x - 1)$$

Podemos encontrar los valores A_1 y A_2 de dos formas. La primera es evaluando cada miembro de la ecuación en las raíces del denominador, ambos deben ser iguale

$$\begin{aligned} x &= 1 \Rightarrow 1 = A_1(1 - 3) + A_2(1 - 1) \Rightarrow 1 = -2A_1 \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{2} \\ x &= 3 \Rightarrow 1 = A_1(3 - 3) + A_2(3 - 1) \Rightarrow 1 = 2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La otra opción es identificar los coefientes de los polinomios en cada miembro

$$1 = A_1(x - 3) + A_2(x - 1) = (A_1 + A_2)x - (3A_1 + A_2)$$

$$\text{Igualando coeficientes} \Rightarrow \begin{cases} \text{Coeficiente de } x & 0 = A_1 + A_2 \\ \text{Coeficiente independiente} & 1 = -(3A_1 + A_2) \end{cases}$$

y resolviendo el sistema obtendríamos la misma solución que antes, de forma que la descomposición buscada es

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{(x-1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-3)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-3)}$$

y ahora se puede integrar cada sumando

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-4x+3}dx &= \int \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-3)}\right) dx \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-3)}dx \\
&= -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-3|
\end{aligned}$$

o factorizando

$$\int \frac{1}{x^2-4x+3}dx = \ln\sqrt{\frac{|x-3|}{|x-1|}}$$

2. El polinomio $Q_m(x)$ sólo tiene raíces reales múltiples

$$Q_m(x) = x^m + \cdots b_1 x + b_0 = (x-r_1)^{m_1}\cdots(x-r_p)^{m_p}$$

donde cada m_k es la multiplicidad de la correspondiente raíz r_k. Realizamos la descomposición en fracciones simples siguiente

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-r_1)} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-r_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{p,1}}{(x-r_p)} + \cdots + \frac{A_{p,m_p}}{(x-r_p)^{m_p}}$$

es decir, se incluyen m_k sumandos para cada raíz r_k usando la multiplicidad. Con esta descomposición tendremos integrales de cadas umando de la forma

$$\int \frac{1}{(x-r)^m}dx = \int (x-r)^{-m}\,dx = \begin{cases} \ln|x-r| & \text{Si } m=1 \\ \frac{1}{1-m}(x-r)^{1-m} & \text{Si } m\neq 1 \end{cases}$$

Por ejemplo

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}dx$$

en este caso

$$x^4-x^2 = x^2(x-1)(x+1) \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^4-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}$$

y por tanto la descomposición en fracciones simples será

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A_{1,1}}{x} + \frac{A_{1,2}}{x^2} + \frac{A_{2,1}}{(x-1)} + \frac{A_{3,1}}{(x+1)}$$

sumamos las fracciones usando el mínimo común múltiplo $x^2(x-1)(x+1)$

$$\begin{aligned}
&\frac{A_{1,1}}{x} + \frac{A_{1,2}}{x^2} + \frac{A_{2,1}}{(x-1)} + \frac{A_{3,1}}{(x+1)} \\
=\;& \frac{A_{1,1}x(x-1)(x+1) + A_{1,2}(x-1)(x+1) + A_{2,1}x^2(x+1) + A_{3,1}x^2(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)}
\end{aligned}$$

e igualando los numeradores de ambas fracciones

$$1 = A_{1,1}x\,(x-1)\,(x+1) + A_{1,2}\,(x-1)\,(x+1) + A_{2,1}x^2\,(x+1) + A_{3,1}x^2\,(x-1)$$

Evaluamos ambos polinomios en cada una de las raíces del denominador

$$\begin{aligned} x &= 0 \Rightarrow 1 = -A_{1,2} \Rightarrow A_{1,2} = -1 \\ x &= 1 \Rightarrow 1 = 2A_{2,1} \Rightarrow A_{2,1} = \frac{1}{2} \\ x &= -1 \Rightarrow 1 = -2A_{3,1} \Rightarrow A_{3,1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como la raíz 0 es doble y no podemos usarla otra vez, para encontrar $A_{1,1}$ usamos cualquier otro valor, por ejemplo $x = 2$

$$1 = 6A_{1,1} + 3A_{1,2} + 12A_{2,1} + 4A_{3,1}$$

y sustituyendo los valores conocidos

$$1 = 6A_{1,1} + 3\,(-1) + 12\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 6A_{1,1} - 3 + 6 - 2 = A_{1,1} + 1$$

de donde

$$A_{1,1} = 0,$$

la descomposición es

$$\frac{1}{x^2\,(x-1)\,(x+1)} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}$$

y podemos sustituir en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}dx &= \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}\right) dx \\ &= -\int \frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)}dx \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{x} + \ln\sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}}. \end{aligned}$$

3. El polinomio $Q_m\,(x)$ tiene raíces complejas simples.

   Suponiendo que $\alpha + i\beta$ es una raíz de $Q_m\,(x)$ entonces, como los coeficientes son reales, también será raíz de $Q_m\,(x)$ el complejo número complejo $\alpha - i\beta$ y habrá un factor de la forma

   $$(x - (\alpha + i\beta))\,(x - (\alpha - i\beta)) = ((x-\alpha) - i\beta)\,((x-\alpha) + i\beta)$$

   a la derecha tenemos una identidad notable de suma por diferencia, luego

   $$((x-\alpha) - i\beta)\,((x-\alpha) + i\beta) = (x-\alpha)^2 - (i\beta)^2$$

y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$

$$(x - (\alpha + i\beta))\,(x - (\alpha - i\beta)) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

es decir, una raíz compleja y su conjugada se reunen en un factor de la forma $(x - \alpha)^2 + \beta^2$, donde α es la parte real de la raíz y β es la parte imaginaria.

Suponiendo ahora que $Q_m(x)$ tiene p raíces reales con multiplicidades $m_1, \ldots, m_p$ y q raíces complejas simples, con sus correspondientes conjugadas:

$$Q_m(x) = (x - r_1)^{m_1} \cdots (x - r_p)^{m_p} \left((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2\right) \ldots \left((x - \alpha_q)^2 + \beta_q^2\right)$$

entonces la descomposición en fracciones simples propuesta es

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-r_1)} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-r_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{p,1}}{(x-r_p)} + \cdots + \frac{A_{p,m_p}}{(x-r_p)^{m_p}} + \frac{B_1x+C_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \cdots + \frac{B_qx+C_q}{(x-\alpha_q)^2+\beta_q^2}$$

es decir, se incluyen m_k sumandos para cada raíz real r_k usando su multiplicidad y q fracciones correspondientes a las raíces complejas. Al integrar cada sumando, obtendremos sumandos de la forma

$$\int \frac{1}{(x - r)^m} dx = \int (x - r)^{-m}\, dx = \begin{cases} \ln|x - r| & \text{Si } m = 1 \\ \frac{1}{1-m}(x - r)^{1-m} & \text{Si } m \neq 1 \end{cases}$$

para las raíces reales y

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx &= \frac{B}{2} \int \frac{2(x - \alpha)}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx + (\alpha + C) \int \frac{1/\beta}{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} dx \\ &= \frac{B}{2} \ln\left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right) + \frac{(B\alpha + C)}{\beta} \arctan\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right) \end{aligned}$$

para las raíces complejas.

Por ejemplo, vamos a calcular la siguiente integral

$$\int \frac{1}{x\,(x^2 - 2x + 5)} dx.$$

Calculamos las raíces del denominador

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm 2i \Rightarrow x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 2^2 = (x - 1)^2 + 4$$

que son complejas y por tanto la descomposición en fracciones simples propuesta sería:

$$\frac{1}{x\,(x^2 - 2x + 5)} = \frac{1}{x\left(4 + (x - 1)^2\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x - 1)^2 + 4}$$

Se ha puesto una fracción correspondiente a la raíz real ($r_1 = 0$) y otro sumando que engloba a las dos raíces complejas conjugadas. Sumando ambas fracciones obtenemos

$$\frac{1}{x\left(4 + (x - 1)^2\right)} = \frac{A\left((x - 1)^2 + 4\right) + (Bx + C)\,x}{(x - 1)^2 + 4}$$

e identificando numeradores, puesto que los denominadores son iguales se obtiene:

$$1 = A\left((x-1)^2+4\right) + (Bx+C)\,x.$$

Si agrupamos coeficientes según las potencias de x, obtenemos

$$1 = A\left(x^2-2x+5\right) + Bx^2 + Cx = (A+B)\,x^2 + (C-2A)\,x + 5A,$$

como es una identidad polinomial, igualamos coeficientes

$$\begin{cases} \text{Coeficiente de } x^2 & 0 = (A+B) \\ \text{Coeficiente de } x & 0 = C-2A \\ \text{Coeficiente independiente} & 1 = 5A \end{cases}$$

El sistema obtenido tiene como solución:

$$A = \tfrac{1}{5} \qquad B = -\tfrac{1}{5} \qquad C = \tfrac{2}{5}\ .$$

La descomposición de la fracción en fracciones simples es

$$\frac{1}{x\left(4+(x-1)^2\right)} = \frac{1}{5}\frac{1}{x} - \frac{1}{5}\frac{x-2}{4+(x-1)^2}$$

y ahora ya podemos integrar cada sumando de forma independiente

$$\int \frac{1}{x\left(x^2-2x+5\right)}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{5}\int \frac{x-2}{4+(x-1)^2}dx$$

El primer sumando es directo

$$\frac{1}{5}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{5}\ln|x|\,.$$

Para el segundo sumando hay que hacer las siguientes modificaciones en la fracción para obtener una integral inmediata

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{4+(x-1)^2} &= \frac{x-1+1}{4+(x-1)^2} = \frac{x-1}{4+(x-1)^2} + \frac{1}{4+(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2\,(x-1)}{4+(x-1)^2} + \frac{1}{4\left(1+\frac{(x-1)^2}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2\,(x-1)}{4+(x-1)^2} + \frac{1}{4\left(1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2\,(x-1)}{4+(x-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right)} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{4+(x-1)^2}dx &= \int \frac{1}{2}\frac{2\,(x-1)}{4+(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right)}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(4+(x-1)^2\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) \end{aligned}$$

y la intgral pedida es sustituyendo

$$\int \frac{1}{x\left(x^2-2x+5\right)}dx = \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\ln\left(4+(x-1)^2\right)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right).$$

4. El polinomio $Q_m(x)$ tiene raíces complejas múltiples. Se puede desarrollar un método similar a los anteriores, aunque en estos caso es menos costoso desde el punto de vista de los cálculos del llamado **método Hermite**, que consiste en descomponer en fracciones simples de la siguiente forma: Supongamos que $Q_m(x)$ tiene p raíces reales r_k con multiplicidad m_k y q raíces complejas $\alpha_j + i\beta_j$, junto con sus conjugadas correspondientes, n_j; los sumandos propuestos para la descomposición son:

   a) Por cada raíz real r_k de $Q_m(x)$, independientemente de su multiplicidad, se incluye un factor de la forma: $\frac{A_k}{(x-r_k)}$

   b) Por cada raíz compleja $\alpha_j + i\beta_j$ de $Q_m(x)$, independientemente de su multiplicidad, se incluye un factor de la forma: $\frac{B_jx+C_j}{(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2}$.

   c) Se añade el factor de Hermite $H(x)$ definido como, una función racional definido como

$$H(x) = \frac{R(x)}{(x-r_1)^{m_1-1}\cdots(x-r_p)^{m_p-1}\left((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right)^{n_1-1}\cdots\left((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right)^{n_q-1}}$$

   donde $R(x)$ es un polinomio con un grado una unidad menos que el grado del denominador. Notar que en el denominador se han incluido todos los factores que constituyen al polinomio $Q_m(x)$, pero disminuyendo en una unidad la correspondiente multiplicidad.
   Es decir la descomposición propuesta por Hermite es:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)}+\cdots+\frac{A_p}{(x-r_p)}+\frac{B_1x+C_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\cdots+\frac{B_qx+C_q}{(x-\alpha_q)^2+\beta_q^2}+H'(x).$$

   Notar que para el término de Hermite se ha incluido su derivada.
   Podemos integrar cada sumando:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int \frac{A_1dx}{(x-r_1)}+\cdots+\int \frac{A_pdx}{(x-r_p)}+\int \frac{(B_1x+C_1)dx}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\cdots+\int \frac{(B_qx+C_q)dx}{(x-\alpha_q)^2+\beta_q^2}+\int H'(x)\,dx$$

   Obviamente

$$\int H'(x)\,dx = H(x)$$

   el resto de sumandos se obtiene como en el caso anterior.

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int \frac{A_1dx}{(x-r_1)}+\cdots+\int \frac{A_pdx}{(x-r_p)}+\int \frac{(B_1x+C_1)dx}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\cdots+\int \frac{(B_qx+C_q)dx}{(x-\alpha_q)^2+\beta_q^2}+H(x)$$

   Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la siguiente primitiva:

$$\int \frac{1}{(x-1)\left(x^2+9\right)^2}dx.$$

   El denominador tiene una raíz real simple en $r_1 = 1$, y una pareja de reaíces complejas conjugadas $\alpha_1 + i\beta_1 = 0 + 3i$, que son dobles. La descomposición en fracciones simples usando Hermite es

$$\frac{1}{(x-1)\left(x^2+9\right)^2} = \frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{x^2+9}+H'(x)$$

donde el factor de Hermite se define como

$$H\left(x\right)=\frac{Dx+E}{x^{2}+9}.$$

cuya derivada

$$H'\left(x\right)=\frac{D\left(x^{2}+9\right)-2x\left(Dx+E\right)}{\left(x^{2}+9\right)^{2}}$$

es la fracción que hay que usar en la descomposición de la función.
El cálculo de los coeficientes A,B,C,D y E se hace en la forma usual: se suman las fracciones usando el mínimo común múltiplo de los denominadores

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x^2+9)^2} &= \frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{x^2+9}+\frac{D\left(x^2+9\right)-(Dx+E)2x}{(x^2+9)^2}\\ &= \frac{A\left(x^2+9\right)^2+(Bx+C)(x-1)\left(x^2+9\right)+\left(D\left(x^2+9\right)-(Dx+E)2x\right)(x-1)}{(x-1)(x^2+9)^2}\\ &= \frac{Ax^4-Dx^3+(D-2E+18A+B)x^2+x(9D+2E-B+C)+(81A-9D-C)}{(x-1)(x^2+9)^2}\end{aligned}$$

y después identificando los numeradores.

$$1 = A\left(x^{2}+9\right)^{2}+\left(Bx+C\right)\left(x-1\right)\left(x^{2}+9\right)+\left(D\left(x^{2}+9\right)-\left(Dx+E\right)2x\right)\left(x-1\right)$$

$$\begin{aligned}1 = {} & \left(A+B\right)x^{4}+\left(C-B-D\right)x^{3}+\\ & \left(18A+9B-C+D-2E\right)x^{2}+\\ & \left(9C-9B+9D+2E\right)x+\\ & \left(81A-9C-9D\right)\end{aligned}$$

Igualando coeficientes del mismo grado en ambos lados de la igualdad obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}0 &= A+B\\ 0 &= C-B-D\\ 0 &= 18A+9B-C+D-2E\\ 0 &= 9C-9B+9D+2E\\ 1 &= 81A-9C-9D\end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{100}\\ B &= -\frac{1}{100}\\ C &= -\frac{7}{450}\\ D &= -\frac{1}{180}\\ E &= \frac{1}{20}\end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)\left(x^2+9\right)^2}dx &= \int \left(\frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+9} + H'(x)\right)dx \\ &= A\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+9}dx + H(x).\end{aligned}$$

La primera integral es inmediata

$$A\int \frac{1}{x-1}dx = A\ln|x-1|$$

la segunda es del tipo que hemos resuelto en el apartado anterior con $\alpha = 0$ y $\beta = 3$

$$\int \frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{B}{2}\ln\left(x^2+9\right) + \frac{C}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$$

de forma que

$$\int \frac{1}{(x-1)\left(x^2+9\right)^2}dx = A\ln|x-1| + \frac{B}{2}\ln\left(x^2+9\right) + \frac{C}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{Dx+E}{(x^2+9)}$$

es decir

$$\int \frac{1}{(x-1)\left(x^2+9\right)^2}dx = \frac{1}{100}\ln|x-1| - \frac{1}{200}\ln\left(x^2+9\right) - \frac{7}{1350}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{180}\frac{x-9}{(x^2+9)}.$$

11.2.4. Integrales de tipo trigonométrico

1. Integrales del tipo:

$$\int R(\cos x, \operatorname{sen} x)\, dx$$

donde $R(x,y)$ es una función racional en las variables x, y, es decir

$$R(x,y) = \frac{P_n(x,y)}{Q_m(x,y)}$$

a) Caso general: En el caso general se realiza el cambio de variable

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

de este modo

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\left(1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

mientras que

$$dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Por ejemplo

$$\int \frac{1}{1+2\operatorname{sen} x}dx$$

haciendo el cambio propuesto

$$\int \frac{1}{1+2\operatorname{sen} x}dx = \int \frac{1}{1+2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{t^2+4t+1}dt$$

que es una integral racional con

$$t^2+4t+1 = (t-\alpha)(t-\beta)$$

donde $\alpha = -2+\sqrt{3}$ y $\beta = -2-\sqrt{3}$. De forma que

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{t^2+4t+1}dt &= \int \left(\frac{A}{t-\alpha}+\frac{B}{t-\beta}\right)dt \\
&= A\int \frac{1}{t-\alpha}dt + B\int \frac{1}{t-\beta}dt \\
&= A\ln|t-\alpha| + B\ln|t-\beta|
\end{aligned}$$

Calculemos ahora los valores para A y B

$$\frac{2}{t^2+4t+1} = \frac{A}{t-\alpha}+\frac{B}{t-\beta} = \frac{A(t-\beta)+B(t-\alpha)}{(t-\alpha)(t-\beta)}$$

y deducimos A y B dando valores $t=\alpha$ y $t=\beta$

$$\begin{aligned}
2 &= A(\alpha-\beta) \Rightarrow A = \frac{2}{\alpha-\beta} = \frac{2}{\left(-2+\sqrt{3}\right)-\left(-2-\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
2 &= B(\beta-\alpha) \Rightarrow B = \frac{2}{\beta-\alpha} = \frac{2}{\left(-2-\sqrt{3}\right)-\left(-2+\sqrt{3}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

y sustituyendo estos valores

$$\int \frac{2}{t^2+4t+1}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln|t-\alpha| - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln|t-\beta| = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{|t-\alpha|}{|t-\beta|}$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{1}{1+2\operatorname{sen} x}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\left|\tan(x/2)+2-\sqrt{3}\right|}{\left|\tan(x/2)+2+\sqrt{3}\right|}$$

o también

$$\int \frac{1}{1+2\operatorname{sen} x}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\left|\operatorname{sen}(x/2)+\left(2-\sqrt{3}\right)\cos(x/2)\right|}{\left|\operatorname{sen}(x/2)+\left(2+\sqrt{3}\right)\cos(x/2)\right|}$$

Vemos a continuación otro ejemplo con el coseno, calculando la siguiente integral:

$$\int \frac{1}{1+2\cos x}dx$$

haciendo el cambio propuesto

$$\int \frac{1}{1+2\cos t}dx = \int \frac{1}{1+2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{3-t^2}dt = -\int \frac{2}{t^2-3}dt$$

que es una integral racional con

$$t^2-3 = \left(t-\sqrt{3}\right)\left(t+\sqrt{3}\right)$$

De forma que

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{t^2-3}dt &= \int \left(\frac{A}{t-\sqrt{3}}+\frac{B}{t+\sqrt{3}}\right)dt \\ &= A\int \frac{1}{t-\sqrt{3}}dt + B\int \frac{1}{t+\sqrt{3}}dt \\ &= A\ln\left|t-\sqrt{3}\right| + B\ln\left|t+\sqrt{3}\right|\end{aligned}$$

Calculamos ahora los valores para A y B

$$\frac{2}{t^2-3} = \frac{A}{t-\sqrt{3}}+\frac{B}{t+\sqrt{3}} = \frac{A\left(t+\sqrt{3}\right)+B\left(t-\sqrt{3}\right)}{\left(t-\sqrt{3}\right)\left(t+\sqrt{3}\right)}$$

y deducirmos A y B dando valores $t=\sqrt{3}$ y $t=-\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} 2 &= A\left(2\sqrt{3}\right) \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 2 &= -2B\left(\sqrt{3}\right) \Rightarrow B = -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

y la integral pedida es

$$\int \frac{2}{3-t^2}dt = -\int \frac{2}{t^2-3}dt = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t-\sqrt{3}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t+\sqrt{3}\right|\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\left|t+\sqrt{3}\right|}{\left|t-\sqrt{3}\right|}$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{1}{1+2\cos x}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\left|\tan(x/2)+\sqrt{3}\right|}{\left|\tan(x/2)-\sqrt{3}\right|}$$

o también

$$\int \frac{1}{1+2\cos x}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\left|\operatorname{sen}(x/2)+\sqrt{3}\cos(x/2)\right|}{\left|\operatorname{sen}(x/2)-\sqrt{3}\cos(x/2)\right|}$$

b) Caso particular I: La función racional es par en x, y, es decir $R(x,y)$ cumple

$$R(-\cos x, -\operatorname{sen} x) = R(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

En este caso se aconseja el cambio

$$t = \tan x$$

de este modo

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

mientras que

$$dt = \left(1+\tan^2(x)\right)dx = \left(1+t^2\right)dx \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

Por ejemplo, para calcular la integral

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$$

podemos comprobar que

$$R(-\cos x, -\operatorname{sen} x) = \frac{(-\cos x)^2}{1+(-\operatorname{sen} x)^2} = \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x} = R(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

luego podemos aplicar el cambio propuesto

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{(2t^2+1)(t^2+1)}dt$$

que es una integral racional con dos raíces complejas simples en del denominador, por tanto podemos realizar la descomposición

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2t^2+1)(t^2+1)} &= \frac{At+B}{2t^2+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1} \\
\frac{1}{(2t^2+1)(t^2+1)} &= \frac{(At+B)\left(t^2+1\right)+(Ct+D)\left(2t^2+1\right)}{(2t^2+1)(t^2+1)} \\
\frac{1}{(2t^2+1)(t^2+1)} &= \frac{(A+2C)t^3+(B+2D)t^2+(A+C)t+(B+D)}{(2t^2+1)(t^2+1)}
\end{aligned}$$

Calculemos ahora los valores para A y B igualando los coeficientes de los numeradores

$$\begin{aligned}
A+2C &= 0 \\
B+2D &= 0 \\
A+C &= 0 \\
B+D &= 1
\end{aligned}$$

que tiene por solución

$$A=C=0; B=2; D=-1$$

Sustituimos estos valores en la descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(2t^2+1)(t^2+1)} = \frac{2}{2t^2+1}-\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+\frac{t^2}{2}}-\frac{1}{1+t^2}$$

y la integral es inmediata

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2t^2+1)(t^2+1)}dt &= \int \left(\frac{2}{1+2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= \int \frac{2}{1+\left(\sqrt{2}t\right)^2}dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \sqrt{2}\arctan\sqrt{2}t - \arctan t\end{aligned}$$

deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}dx = \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) - x.$$

c) Caso particular II: La función racional es par en x, y, es decir $R(x,y)$ cumple

$$R(-\cos x, -\operatorname{sen} x) = R(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

En este caso se aconseja el cambio

$$t = \tan x$$

de este modo

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

mientras que

$$dt = \left(1+\tan^2(x)\right)dx = \left(1+t^2\right)dx \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

Por ejemplo, para calcular la integral

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$$

podemos comprobar que

$$R(-\cos x, -\operatorname{sen} x) = \frac{(-\cos x)^2}{1+(-\operatorname{sen} x)^2} = \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x} = R(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

luego podemos aplicar el cambio propuesto

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{(2t^2+1)(t^2+1)}dt$$

que es una integral racional con dos raíces complejas simples en del denominador, por tanto podemos realizar la descomposición

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2t^2+1)(t^2+1)} &= \frac{At+B}{2t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1} \\ \frac{1}{(2t^2+1)(t^2+1)} &= \frac{(At+B)\left(t^2+1\right)+(Ct+D)\left(2t^2+1\right)}{(2t^2+1)(t^2+1)} \\ \frac{1}{(2t^2+1)(t^2+1)} &= \frac{(A+2C)t^3+(B+2D)t^2+(A+C)t+(B+D)}{(2t^2+1)(t^2+1)}\end{aligned}$$

Calculemos ahora los valores para A y B igualando los coeficientes de los numeradores

$$\begin{aligned} A+2C &= 0 \\ B+2D &= 0 \\ A+C &= 0 \\ B+D &= 1 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$A=C=0; B=2; D=-1$$

Sustituimos estos valores en la descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(2t^2+1)(t^2+1)} = \frac{2}{2t^2+1} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+\frac{t^2}{2}} - \frac{1}{1+t^2}$$

y la integral es inmediata

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(2t^2+1)(t^2+1)}dt &= \int \left(\frac{2}{1+2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= \int \frac{2}{1+\left(\sqrt{2}t\right)^2}dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \sqrt{2}\arctan\sqrt{2}t - \arctan t \end{aligned}$$

deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}dx = \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) - x.$$

d) Caso particular III: La función racional es impar en x, es decir $R(x,y)$ cumple

$$R(-\cos x, \operatorname{sen} x) = -R(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

En este caso se aconseja el cambio

$$t = \operatorname{sen} x$$

de este modo

$$\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-t^2}$$

mientras que

$$dt = (\cos x)\,dx = \sqrt{1-t^2}dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Por ejemplo, para calcular la integral

$$\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$$

podemos comprobar que

$$R(-\cos x, \operatorname{sen} x) = \frac{-\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} = -R(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

luego podemos aplicar el cambio propuesto

$$\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx = \int \frac{1}{1+t^2}dt$$

que es una integral inmediata con

$$\int \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan t$$

deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \arctan(\operatorname{sen} x).$$

e) Caso particular IV: La función racional es impar en y, es decir $R(x,y)$ cumple

$$R(\cos x, -\operatorname{sen} x) = -R(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

En este caso se aconseja el cambio

$$t = \cos x$$

de este modo

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}$$

mientras que

$$dt = -\operatorname{sen}(x)\,dx = -\sqrt{1-t^2}dx \Rightarrow dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Por ejemplo, para calcular la integral

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x}dx$$

podemos comprobar que

$$R(\cos x, -\operatorname{sen} x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x} = -R(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

luego podemos aplicar el cambio propuesto

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x}dx = \int \frac{-1}{t+t^2}dt = -\int \frac{1}{t(1+t)}dt$$

que es una integral racional con

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)}$$

con

$$A(t+1)+Bt = 1 \Leftrightarrow (A+B)t + A = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A=1 \\ \\ B=-1 \end{array} \right|$$

de donde

$$\int \frac{-1}{t+t^2}dt = -\int \frac{1}{t}dt + \int \frac{1}{t+1}dt = -\ln|t| + \ln|t+1| = \ln\frac{|t+1|}{|t|}$$

deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x}dx = \ln\frac{|1+\cos x|}{|\cos x|}.$$

2. Integrales del tipo
$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx$$
distinguiremos según los valores de m y n.

   a) Caso $m = 2p+1$, impar. Hacemos el cambio $t = \cos(x)$ y $dt = -\operatorname{sen}(x)\,dx$, de modo que
$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx &= \int \operatorname{sen}^{2p+1}(x)\cos^n(x)\,dx\\ &= \int \left(\operatorname{sen}^2(x)\right)^p \cos^n(x)\operatorname{sen} x dx\\ &= \int \left(1-\cos^2(x)\right)^p \cos^n(x)\operatorname{sen} x dx\end{aligned}$$
   y con el cambio
$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx = -\int \left(1-t^2\right)^p t^n dt$$
   que es inmediata.
   Por ejemplo
$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x dx &= \int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\operatorname{sen} x dx\\ &= \int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x\operatorname{sen} x dx\\ &= \int \left(1-t^2\right)t^2 dt\\ &= \int \left(t^2-t^4\right)dt = \frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\end{aligned}$$
   y deshaciendo el cambio
$$\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x dx = \frac{\cos^3 x}{3}-\frac{\cos^5 x}{5}$$

   b) Caso $n = 2p+1$, impar. Hacemos el cambio $t = \operatorname{sen}(x)$ y $dt = \cos(x)\,dx$, de modo que
$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx &= \int \operatorname{sen}^m(x)\cos^{2p+1}(x)\,dx\\ &= \int \operatorname{sen}^n(x)\left(\cos^2(x)\right)^p\cos x dx\\ &= \int \operatorname{sen}^n(x)\left(1-\operatorname{sen}^2(x)\right)^p\cos x dx\end{aligned}$$
   y con el cambio obtenemos
$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx = \int t^n\left(1-t^2\right)^p dt$$

que es inmediata.
Por ejemplo

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \cos x dx \\ &= \int \operatorname{sen}^4 x \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right) \cos x dx \\ &= \int t^4 \left(1-t^2\right) dt \\ &= \int \left(t^4-t^6\right) dt = \frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}\end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x dx = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}-\frac{\operatorname{sen}^7 x}{7}.$$

c) Caso $n=2p$ y $m=2q$, ambos son pares. En este caso se hacen los cambios trigonométricos

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

con eso se consigue dividir el exponente a la mitad.
Por ejemplo

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x dx$$

en este caso

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}\end{aligned}$$

de modo que

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = \frac{1-\cos^2 2x}{4}\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 2x$$

podemos utilizar de nuevo el cambio trigonométrico para el término $\cos^2 2x$ y poner

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$$

de modo que

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x$$

e integrando

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx &= \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx \\ &= \int \frac{1}{8} dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x.\end{aligned}$$

3. Integrales del tipo

$$\int f(x)\, g(x)\, dx$$

donde

$$f(x), g(x) \in \{\operatorname{sen} Ax, \cos Bx\} \text{ con } A, B \in \mathbb{R}$$

Para este tipo de integrales se utilizan las siguientes relaciones trigonométricas

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} Ax \cos Bx &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(A-B)x + \operatorname{sen}(A+B)x\right) \\ \operatorname{sen} Ax \operatorname{sen} Bx &= \frac{1}{2}\left(\cos(A-B)x - \cos(A+B)x\right) \\ \cos Ax \cos Bx &= \frac{1}{2}\left(\cos(A-B)x + \cos(A-B)x\right)\end{aligned}$$

Por ejemplo, vamos a calcular la siguiente integral

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 4x dx$$

usando las relaciones trigonométricas anteriores

$$\operatorname{sen} 3x \cos 4x = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen}(7x)\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} x\right)$$

e integrando

$$\begin{aligned}\int (\operatorname{sen} 3x \cos 4x)\, dx &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 7x}{7} + \cos x\right) \\ &= \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 7x}{14}.\end{aligned}$$

11.2.5. Integrales de funciones irracionales algebráicas

Son integrales del tipo

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \dots \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_r/n_r}\right) dx$$

donde $R(x, y_1, y_2, \dots, y_r)$ es una expresión racional, $\frac{m_k}{n_k} \in \mathbb{Q}$ y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

En este caso debemos hacer el cambio de variable

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=t^M$$

donde

$$M=m.c.m\left(n_1,\ldots,n_r\right)$$

Por ejemplo vamos a calcular

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

En este caso tendremos sólo tenemos un término

$$\sqrt{x}=\left(\frac{1\cdot x+0}{0\cdot x+1}\right)^{1/2}$$

y por tanto hacemos el cambio

$$x=t^2\Rightarrow\sqrt{x}=t$$

de donde

$$dx=2tdt$$

y la integral se transforma en

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} &= \int\frac{2tdt}{(1+t^2)\,t}\\ &= \int\frac{2}{1+t^2}dt\\ &= 2\arctan t\\ &= 2\arctan\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Si queremos calcular

$$\int\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=\int\left(\frac{x}{1+x}\right)^{1/2}dx$$

en este caso

$$\frac{x}{1+x}=t^2\Rightarrow t=\sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

de donde

$$x=t^2\left(1+x\right)\Leftrightarrow x=t^2+t^2x\Leftrightarrow x\left(1-t^2\right)=t^2\Leftrightarrow x=\frac{t^2}{1-t^2}$$

y por tanto

$$dx=\frac{2t\left(1-t^2\right)+2t^3}{\left(1-t^2\right)^2}dt=\frac{2t}{\left(1-t\right)^2\left(1+t\right)^2}dt$$

y por tanto

$$\int\left(\frac{x}{1+x}\right)^{1/2}dx=\int\frac{2t^2}{\left(1-t\right)^2\left(1+t\right)^2}dt$$

que es una integral racional cuyo denominador tiene dos raíces reales dobles en 1 y -1

$$\begin{aligned}\frac{2t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} &= \frac{A}{1-t}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{C}{1+t}+\frac{D}{(1+t)^2} \\ &= \frac{A(1-t)(1+t)^2+B(1+t)^2+C(1+t)(1-t)^2+D(1-t)^2}{(1-t)^2(1+t)^2} \\ &= \frac{(C-A)t^3+(B-A-C+D)t^2+(A+2B-C-2D)t+(A+B+C+D)}{(1-t)^2(1+t)^2}\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} C-A &= 0 \\ (B-A-C+D) &= 2 \\ (A+2B-C-2D) &= 0 \\ (A+B+C+D) &= 0 \end{aligned}$$

igualando polinomios y evaluando en las raíces podemos obtener dos valores rápidamente

$$2t^2 = A(1-t)(1+t)^2+B(1+t)^2+C(1+t)(1-t)^2+D(1-t)^2$$

para $t=1$

$$2=4B \Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

para $t=-1$

$$2=4D \Rightarrow D=\frac{1}{2}$$

de forma que el sistema sería

$$\begin{aligned} C-A &= 0 \\ -A-C &= 1 \end{aligned}$$

con solución

$$A=C=-\frac{1}{2}$$

la descomposición es

$$\begin{aligned}\frac{2t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1+t)^2} \\ & \frac{1}{2}\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(t+1)^2}\end{aligned}$$

e integrando término a término

$$\int \frac{2t^2}{(1-t)^2(1+t)^2}dt = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t-1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t-1)^2}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t+1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t+1)^2}dt$$

que son todas inmediatas

$$\begin{aligned}\int \frac{2t^2}{(1-t)^2(1+t)^2}dt &= \frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}\ln|t+1|-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}-\frac{t}{t^2-1}\end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \left(\frac{x}{1+x}\right)^{1/2} dx = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\frac{x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{x}{1+x}}+1} - \frac{\sqrt{\frac{x}{1+x}}}{\frac{x}{1+x}-1}.$$

11.2.6. Integrales de funciones radicales I

Son integrales del tipo

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx.$$

Para calcular la primitiva de este tipo de funciones debemos completar el cuadrado de forma que

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx = \int \sqrt{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right)}dx$$

Si $a > 0$, entonces podemos hacer el cambio

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = u^2 \Rightarrow \sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right) = u \Rightarrow \sqrt{a}dx = du$$

y por tanto la integral se transforma en

$$\int \sqrt{\left(u^2 + \left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\right)}du$$

y según el signo de $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$ tendremos. Si $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) > 0$, entonces podemos poner $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = k^2$ de forma que la integral se transforma en

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx = \int \sqrt{u^2+k^2}du$$

por el contrario si $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) < 0$, entonces podemos poner $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = -k^2$ de forma que la integral se transforma en

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx = \int \sqrt{u^2-k^2}du$$

Si $a < 0$ entonces puesto que $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 < 0$, podemos hacer el cambio

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = -u^2 \Rightarrow -a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = u^2$$

de donde

$$\sqrt{-a}\left(x+\frac{b}{2a}\right) = u \Rightarrow \sqrt{-a}dx = du$$

y la integral se transforma en

$$\int \sqrt{\left(-u^2 + \left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\right)}du$$

en este caso la única opción posible es que $\left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) > 0$ o de lo contrario el radicando es negativo, así que podemos poner $\left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) = k^2$ y obtenemos una integral de la forma

$$\int \sqrt{k^2 - u^2}du$$

Para cada uno de los tipos de integrales se propone un cambio de variable distinto

$$\text{Tipo 1} \quad \left\{ \begin{array}{c} a > 0 \\ \\ \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \int \sqrt{u^2 + k^2}du \quad u = k\,\mathrm{Sh}\,t$$

$$\text{Tipo 2} \quad \left\{ \begin{array}{c} a > 0 \\ \\ \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \int \sqrt{u^2 - k^2}du \quad u = k\,\mathrm{Ch}\,t$$

$$\text{Tipo 3} \quad a < 0 \Rightarrow \int \sqrt{k^2 - u^2}du \qquad \begin{array}{l} u = k\cos t \\ u = k\,\mathrm{sen}\,t \end{array}$$

También es posible resolver este tipo de integrales usando los llamados cambios de Euler:

Condición	Cambio
$a > 0$	$\pm\sqrt{a}x + t = \sqrt{ax^2 + bx + c}$
$c > 0$	$tx \pm \sqrt{c} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$
α raíz del polinomio	$t\,(x - \alpha) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

Ejemplo 11.4 *Calcula las siguientes integrales*

a) $\int \sqrt{4 - x^2}dx$ *b)* $\int \sqrt{3 + 2x - x^2}dx$ *a)* $\int \sqrt{1 + x - x^2}dx$

Solución:

a) Hacemos el cambio

$$x = 2\,\mathrm{sen}\,t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$$

de modo que

$$x^2 = 4\,\mathrm{sen}^2\,t$$

2

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4-x^2}dx &= \int \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t} \quad 2\cos t dt \\ &= \int \sqrt{4\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)} 2\cos t dt \\ &= \int 2\sqrt{\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)} 2\cos t dt \\ &= \int 4\sqrt{\cos^2 t}\cos t dt \\ &= \int 4\cos^2 t dt\end{aligned}$$

y se transforma en una integral trigonométrica. Hacemos el cambio trigonométrico

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

para obtener

$$\int 4\cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}$$

b) Primero hay que transformar la ecuación de segundo grado para completar el cuadrado de una suma:

$$3 + 2x - x^2 = 4 - (x-1)^2$$

y la integral se transforma en

$$\int \sqrt{3+2x-x^2}dx = \int \sqrt{4-(x-1)^2}dx$$

que se resuelve como en el apartado anterior, aunque en este caso el cambio debe ser

$$(x-1) = 2\cos t.$$

c) Primero hay que transformar la ecuación de segundo grado para completar el cuadrado de una suma:

$$1 + x - x^2 = \frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

y la integral se transforma en

$$\int \sqrt{1+x-x^2}dx = \int \sqrt{\frac{5}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2} dx$$

y en este caso el cambio de variable que hay que realizar es

$$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos t.$$

11.2.7. Integrales de funciones radicales II

Son integrales del tipo

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio con coeficientes reales. Para el caso en el que $P_n(x)$ sea un polinomio constante, se utilizarán los cambios realizados en el apartado anterior o bien completando el cuadrado. Las primitivas para estos casos son de tipo arcsen, $\arg \operatorname{Sh} x$ o $\arg \operatorname{Ch} x$. Para otro tipo de polinomios se utiliza el llamado método Alemán que consiste en descomponer la integral de la siguiente forma

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{L}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

siendo $P_{n-1}(x)$ un polinomio de grado menor que $P_n(x)$ y $L \in \mathbb{R}$. Los coeficientes del polinomio se obtienen derivando la ecuación anterior.

Ejemplo 11.5 *Calcula las siguientes integrales*

$$a)\ \int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx \qquad b)\ \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx \qquad a)\ \int \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$$

Solución:

a) Hacemos el cambio

$$x = \sqrt{3}\operatorname{sen} t \Rightarrow dx = \sqrt{3}\cos t dt$$

de modo que

$$x^2 = 3\operatorname{sen}^2 t$$

2

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{3-3\operatorname{sen}^2 t}}\sqrt{3}\cos t\ dt \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\sqrt{3}\cos t\ dt \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{3}\cos t}\sqrt{3}\cos t\ dt \\
&= \int 1dt = t
\end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$f(x) = \operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{3}}$$

b) Primero hay que transformar la ecuación de segundo grado para completar el cuadrado de una suma:

$$3+2x-x^2 = 4-(x-1)^2$$

y la integral se transforma en

$$\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx$$

que se resuelve como en el apartado anterior, aunque en este caso el cambio debe ser

$$(x-1) = 2\cos t.$$

c) Primero hay que transformar la ecuación de segundo grado para completar el cuadrado de una suma:

$$1+x-x^2=\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

y la integral se transforma en

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx$$

y en este caso el cambio de variable que hay que realizar es

$$x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t.$$

Ejemplo 11.6 *Calcula la siguiente integral*

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

Solución: Utilizaremos el método Alemán

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx=P_{n-1}\left(x\right)\sqrt{-x^2-2x+1}+\int \frac{L}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

como el numerador de la integral es un polinomio de grado 1, el polinomio $P_{n-1}\left(x\right)$ debe ser un polinomio de grado 0, es decir, una constante $P_{n-1}\left(x\right)=A$, por tanto

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx=A\sqrt{-x^2-2x+1}+\int \frac{L}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A y L

$$\frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}=-A\frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}+\frac{L}{\sqrt{-x^2-2x+1}}=\frac{-Ax-A+L}{\sqrt{-x^2-2x+1}}$$

e igualando coeficientes

$$\left.\begin{array}{r}3=-A\\ 1=-A+L\end{array}\right\}\Rightarrow A=-3 \text{ y } L=-2$$

por tanto

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx=-3\sqrt{-x^2-2x+1}-\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

La integral

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$$

se calcula mediante un cambio de variable. Completamos el cuadrado de la suma

$$-x^2-2x+1=2-(x+1)^2$$

por tanto

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx=\int \frac{2}{\sqrt{2-(x+1)^2}}dx$$

Hacemos el cambio

$$(x+1)^2 = 2\operatorname{sen}^2 t \Longleftrightarrow (x+1) = \sqrt{2}\operatorname{sen} t \Longrightarrow dx = \sqrt{2}\cos t\ dt$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{\sqrt{2-(x+1)^2}}dx &= \int \frac{2}{\sqrt{2-2\operatorname{sen}^2 t}}dt = \int \frac{2}{\sqrt{2\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)}}\sqrt{2}\cos t\ dt \\
&= \int \frac{2}{\sqrt{\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)}}\cos t\ dt = \int \frac{2}{\sqrt{\cos^2 t}}\cos t\ dt \\
&= \int 2dt = 2t = 2\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

De modo que la integral es

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx = -3\sqrt{-x^2-2x+1} - 2\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

11.2.8. Integrales binómicas

Son integrales de la forma

$$\int x^p\left(a+bx^r\right)^q dx \qquad a,b\in\mathbb{R};\ p,q,r\in\mathbb{Q}.$$

Primero se propone la solución de las llamadas integrales binómicas o binomias de tipo I, para las que $a=b=1$ y $r=1$, es decir:

$$\int x^p\left(1+x\right)^q dx;\ p,q\in\mathbb{Q}$$

para las que distinguimos 3 casos:

$$\text{Tipo 1} \quad q\in\mathbb{Z}\Rightarrow \qquad (1+x)^q = \textstyle\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}x^k$$

$$\text{Tipo 2} \quad \left\{\begin{array}{l} q=\frac{m}{n}\notin\mathbb{Z} \\ p\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Rightarrow \quad (1+x)=t^n$$

$$\text{Tipo 3} \quad \left\{\begin{array}{l} q=\frac{m}{n}\notin\mathbb{Z} \\ p\notin\mathbb{Z} \\ p+q\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Rightarrow \quad \begin{array}{c}\text{Multiplicar y dividir por el factor } x^q \\ \text{y después hacer el cambio} \\ \left(\dfrac{1+x}{x}\right)=t^n\end{array}$$

Para las integrales binomias de tipo general se hace el cambio

$$bx^r = at \Rightarrow x^r = \frac{a}{b}t \Rightarrow x = \left(\frac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{r}} \Rightarrow dx = \frac{1}{r}\left(\frac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{r}-1}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\int x^p (a+bx^r)^q \, dx &= \int \left(\left(\frac{a}{b}t\right)^{1/r}\right)^p (a+at)^q \, \frac{1}{r}\left(\frac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{r}-1} dt \\
&= \int \frac{a^{p/r}}{b^{p/r}} t^{p/r} a^q (1+t)^q \, \frac{1}{r}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{r}-1} t^{\frac{1}{r}-1} dt \\
&= \int \frac{1}{r} a^{\frac{(q-1)r+p+1}{r}} b^{\frac{r-p-1}{r}} t^{\frac{p+1-r}{r}} (1+t)^q \, dt \\
&= \frac{1}{r} a^{\frac{(q-1)r+p+1}{r}} b^{\frac{r-p-1}{r}} \int t^{\frac{p+1-r}{r}} (1+t)^q \, dt
\end{aligned}
$$

y renombramos las variables como

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{p+1-r}{r} \\
\beta &= q
\end{aligned}
$$

el integrando será de la forma

$$\int t^\alpha (1+t)^\beta \, dt$$

que es una integral de tipo I.

Ejemplo 11.7 *Calcula la integral binómica*

$$\int x \left(2+x^{2/3}\right)^{1/2} dx$$

En primer lugar, la transformamos en una binómica de tipo I, haciendo el cambio

$$x^{2/3} = 2t \Rightarrow x = (2t)^{3/2} = 2\sqrt{2}t^{3/2} \Rightarrow dx = 3\sqrt{2}t^{1/2} dt$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
\int x \left(2+x^{2/3}\right)^{1/2} dx &= \int 2\sqrt{2}t^{3/2} (2+2t)^{1/2} \, 3\sqrt{2}t^{1/2} dt \\
&= 12\sqrt{2} \int t^2 (1+t)^{1/2} \, dt
\end{aligned}
$$

como la potencia de t es un entero, entonces hacremos el cambio

$$1+t = u^2 \Rightarrow t = u^2 - 1 \Rightarrow dt = 2udu$$

y sustituyendo

$$24\sqrt{2} \int \left(u^2-1\right)^2 u^2 du$$

que es inmediata

$$24\sqrt{2} \int \left(u^6 - 2u^4 + u^2\right) du = 24\sqrt{2}\left(\frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^3}{3}\right)$$

deshaciendo el segundo cambio

$$24\sqrt{2}\left(\frac{(1+t)^{7/2}}{7}-\frac{2\,(1+t)^{5/2}}{5}+\frac{(1+t)^{3/2}}{3}\right)$$

y finalmente el primero $\frac{1}{2}x^{2/3}=t$

$$24\sqrt{2}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{2}x^{2/3}\right)^{7/2}}{7}-\frac{2\left(1+\frac{1}{2}x^{2/3}\right)^{5/2}}{5}+\frac{\left(1+\frac{1}{2}x^{2/3}\right)^{3/2}}{3}\right)$$

$$24\sqrt{2}\left(\frac{\left(2+x^{2/3}\right)^{7/2}}{2^{7/2}7}-\frac{2\left(2+x^{2/3}\right)^{5/2}}{2^{5/2}5}+\frac{\left(2+x^{2/3}\right)^{3/2}}{2^{3/2}3}\right)$$

$$\left(\frac{3\left(2+x^{2/3}\right)^{7/2}}{7}-\frac{12\left(2+x^{2/3}\right)^{5/2}}{5}+4\left(2+x^{2/3}\right)^{3/2}\right)$$

Ejemplo 11.8 *Calcula la integral binómica*

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

Se trata de una integral que podemos expresar como

$$\int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-1/2}dx$$

En primer lugar, la transformamos en una binómica de tipo I, haciendo el cambio

$$x^2=t\Rightarrow x=t^{1/2}\Rightarrow dx=\frac{1}{2}t^{-1/2}dt$$

de modo que

$$\begin{aligned}\int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-1/2}dx &= \int\left(t^{1/2}\right)^{-4}(1+t)^{-1/2}\,\frac{1}{2}t^{-1/2}dt\\ &= \int t^{-5/2}\,(1+t)^{-1/2}\,dt,\end{aligned}$$

se comprueba que ni la potencia de t*, ni la potencia de* $1+t$ *son números enteros, sin embargo, la suma de estos exponentes*

$$-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{6}{2}=-3$$

si es un número entero, así que multiplicamos y dividimos por $t^{\beta}=t^{-1/2}$

$$\int t^{-5/2}\,(1+t)^{-1/2}\,dt=\int t^{-5/2}\,(1+t)^{-1/2}\,\frac{t^{-1/2}}{t^{-1/2}}dt$$

y reagrupamos

$$\int t^{-3}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2}dt$$

finalmente hacemos el cambio

$$\frac{1+t}{t} = u^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{1+t}{t}}$$

$$1+t = u^2 \Rightarrow 1 = t\left(u^2-1\right) \Rightarrow t = \frac{1}{u^2-1} \Rightarrow dt = \frac{-2u}{\left(u^2-1\right)^2}du$$

con lo que la integral se transforma en

$$\begin{aligned}
\int t^{-3}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-1/2} dt &= \int \left(\frac{1}{u^2-1}\right)^{-3} \left(u^2\right)^{-1/2} \left(\frac{-2u}{\left(u^2-1\right)^2}\right) du \\
&= \int \left(u^2-1\right)^3 u^{-1} \left(\frac{-2u}{\left(u^2-1\right)^2}\right) du \\
&= -\int \left(u^2-1\right) du
\end{aligned}$$

que es inmediata

$$-\int \left(u^2-1\right) du = -\frac{u^3}{3} + u$$

deshaciendo el segundo cambio

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{3/2} + \left(\frac{1+t}{t}\right)^{1/2}$$

y finalmente el primero $x^2 = t$

$$\int x\left(2+x^{2/3}\right)^{1/2} dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{3/2} + \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{1/2} + C$$

Ejercicio 1 *Calcula las siguientes integrales*

a) $\int x^3\sqrt{2x^2+1}dx$ *b)* $\int \frac{1}{x^3\sqrt{1+x^5}}dx$

c) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx$ *d)* $\int x^3\left(1+2x^2\right)^{-3/2} dx$