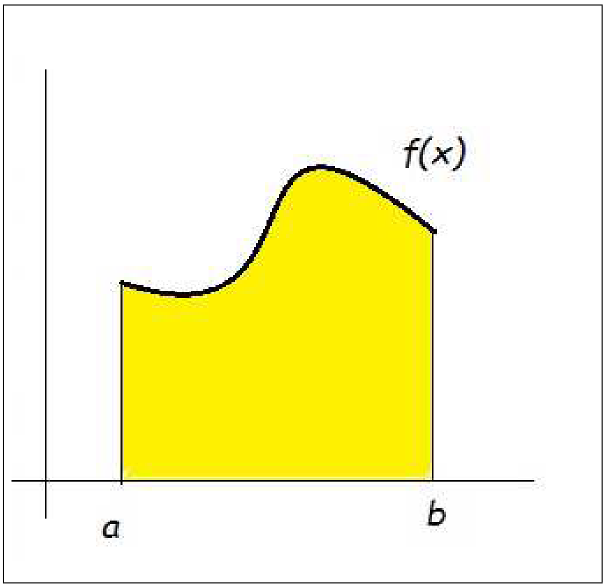
Capítulo 12

Integral de Riemann

12.1. Introducción

Supongamos $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, una función acotada y positiva en el intervalo $[a, b]$. Se pretende calcular el área que hay bajo esa curva (zona amarilla figura 12.1)



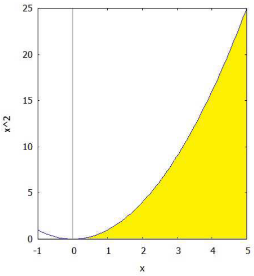
Area bajo la curva $f(x)$

Este área se representará mediante la notación usual

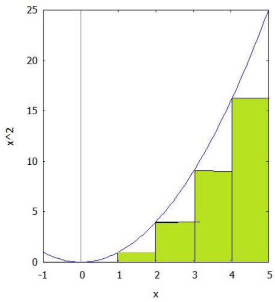
$$\int_a^b f(x)\, dx$$

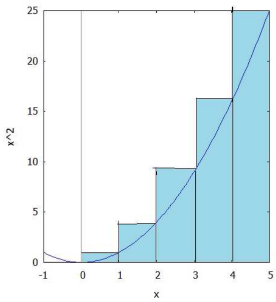
y recibe el nombre de *integral definida* o *Integral de Riemann.*

El procedimiento que vamos a hacer para obtener un valor aproximado del valor del área de una curva, por ejemplo, gráfica

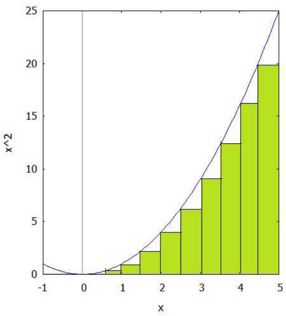


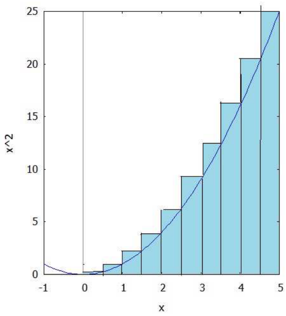
es construir una serie de rectángulos con base los puntos del intervalo y como alturas los valores de la función en puntos conocidos del intervalo. En la imagen vemos una aproximación como la descrita. En el primer gráfico estamos obteniendo una aproximación por defecto, ya que todos los rectángulos caen bajo la curva. En el segundo gráfico estamos obteniendo una aproximación por exceso, ya que los rectángulos cubren completamente el área bajo la curva.





Se observa además que si aumentamos el número de rectángulos como en la gráfica siguiente





obtenemos una mejor aproximación. Observemos además que la suma por defecto es mayor que la anterior (deja menos hueco entre la curva y los rectángulos) y la suma por exceso es menor (la zona que sobrepasa la curva es menor).

12.1.1. Sumas inferiores y superiores. Integral en sentido Riemann

Definición 12.1 *Se define* partición *de un intervalo* $[a, b]$*, como el conjunto definido como*

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

donde

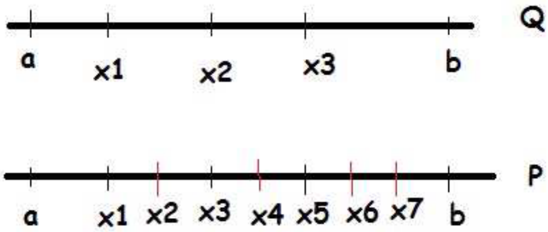
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Definición 12.2 *Se define* norma de la partición $\mathcal{P}$*, y se representará por* $\|\mathcal{P}\|$ *a:*

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{k=1,\dots n} \{x_k - x_{k-1}\}$$

Definición 12.3 *Dadas dos particiones,* $\mathcal{P}$ *y* $\mathcal{Q}$*, del intervalo* $[a, b]$*, se dice que* $\mathcal{P}$ *es* más fina que $\mathcal{Q}$ *si* $\|\mathcal{P}\| < \|\mathcal{Q}\|$ *y todos los puntos de* $\mathcal{Q}$ *también están en* $\mathcal{P}$*.*

La definición indica que $\mathcal{P}$ divide al intervalo $[a, b]$ en más subintervalos que $\mathcal{Q}$ y además son más pequeños.



$\mathcal{P}$ es *más* fina que $\mathcal{Q}$

En la imagen 12.1.1 podemos comprobar cómo la partición $\mathcal{P}$ contiene más puntos y sus subintervalos tienen longitudes menores.

Vamos a considerar que la función f es acotada en $[a, b]$ y por tanto también será acotada en cada uno de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ que está incluido en la partición, denotamos a m_k y M_k como

$$m_k = \min \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \max \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

está claro que los productos $m_k(x_k - x_{k-1})$ y $M_k(x_k - x_{k-1})$ representa las áreas de cada uno de los rectángulos, inferior y superior, que tiene como base el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

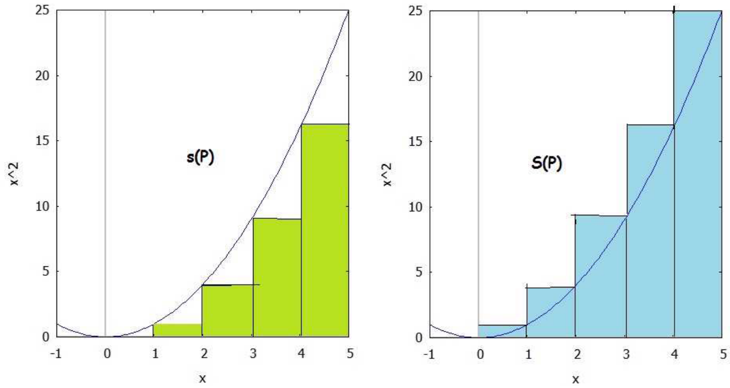
Definición 12.4 *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, y sea* $\mathcal{P}$ *una partición del intervalo definimos* suma inferior *de* f *asociada a* $\mathcal{P}$ *a*

$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

y definimos suma superior *de* f *asociada a* $\mathcal{P}$ *a*

$$S(P) = \sum_{k=1}^{M} m_k (x_k - x_{k-1})$$

Las sumas inferiores y superiores dan una aproximación por defecto y por exceso, respectivamente, del valor real del área bajo la curva.



Proposición 12.1 *Sea $\dot{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$, con $f(x)\geq 0$ y acotada en $[a,b]$ y si A es el área bajo la curva, entonces, se cumple;*

1.
$$s(P)\leq A\leq S(P)$$

2. *Si $m=\min\{f(x):x\in[a,b]\}$*
$$m(b-a)\leq s(P)$$

3. *Si $M=\max\{f(x):x\in[a,b]\}$*
$$S(P)\leq M(b-a)$$

De la proposición se deduce que

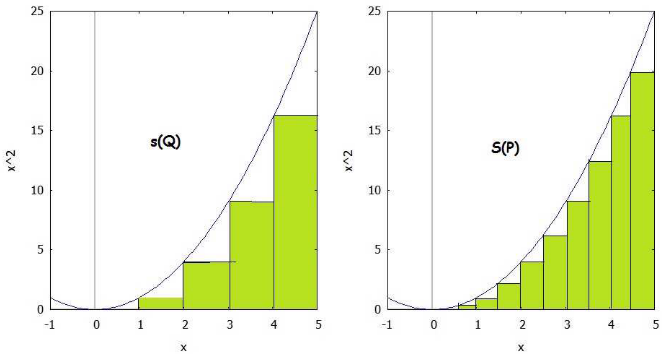
$$m(b-a)\leq s(P)\leq A\leq S(P)\leq M(b-a)$$

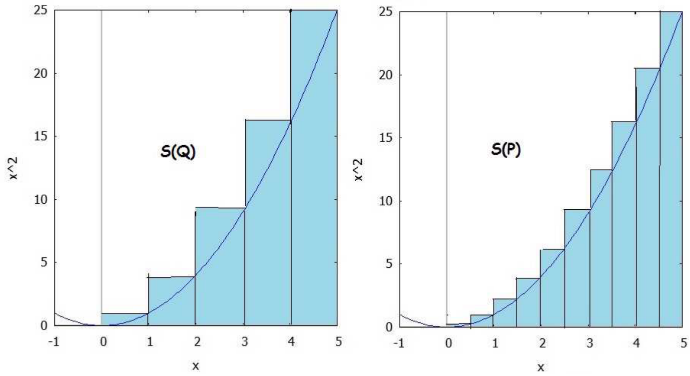
es decir cualquier suma inferior está acotada superiormente por $M(b-a)$ y cualquier suma superior está acotada inferiormente por $m(b-a)$.

Proposición 12.2 *Sea $\dot{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$, con $f(x)\geq 0$ y acotada en $[a,b]$. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos particiones del intervalo, siendo Sea $\mathcal{P}$ más fina que $\mathcal{Q}$, entonces, se cumple:*

1.
$$s(\mathcal{P})\geq s(\mathcal{Q})$$

2.
$$S(\mathcal{P})\leq S(\mathcal{Q})$$





Los resultados anteriores nos dicen que las aproximaciones al área bajo la curva, mediante áreas de rectángulos mejoran al tomar particiones cada vez más finas del intervalo. Si consideramos una sucesión de particiones $\mathcal{P}_k$ cada vez más finas del intervalo, entonces por la proposición anterior tendremos

$$s(\mathcal{P}_1) \leq s(\mathcal{P}_2) \leq \cdots \leq s(\mathcal{P}_M) \leq \cdots$$

$$S(\mathcal{P}_1) \geq S(\mathcal{P}_2) \geq \cdots \geq S(\mathcal{P}_M) \geq \cdots$$

La primera sucesión es creciente y está acotada superiormente por $M(b-a)$, mientras que la segunda es decreciente y está acotada inferiormente por $m(b-a)$, por la teoría de sucesiones de números reales, ambas sucesiones tienen límite y tiene sentido la siguiente definición.

Definición 12.5 *Sea* $\dot{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$*, con* $f(x) \geq 0$*. Si consideramos una sucesión de particiones* $\mathcal{P}_k$ *cada vez más finas del intervalo, definimos la* integral inferior de f *en* $[a,b]$

$$\lim s(\mathcal{P}_n) = \underline{\int_a^b} f$$

y se define la integral superior de f *en* $[a,b]$

$$\lim S(\mathcal{P}_n) = \overline{\int_a^b} f$$

Definición 12.6 *Se dice que* $\dot{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$*, con* $f(x) \geq 0$ *y acotada en* $[a,b]$ *es* integrable (en sentido Riemann), *sí y sólo sí,*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

A este valor común se le denomina integral definida *de* f $[a,b]$ *y se representa por*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 12.1 *Probar que la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable en el intervalo $[0,1]$.

Solución: Sea $\mathcal{P}$ una partición cualquiera del intervalo y calcularemos las sumas inferiores y superiores asociadas a $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$$

Cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ contiene tanto números racionales como irracionales, luego

$$m_k = \min\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0$$

$$M_k = \max\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1$$

de modo que

$$s(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0 (x_k - x_{k-1}) = 0$$

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1 (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a = 1$$

esto ocurre para cualquier partición luego

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} f &= \lim s(\mathcal{P}) = \lim 0 = 0 \\ \overline{\int_a^b} f &= \lim S(\mathcal{P}) = \lim 1 = 1 \end{aligned}$$

y por tanto la función $f(x)$ no es integrable en sentido Riemann.

12.1.2. Sumas de Riemann. Aplicación al cálculo de límites de sucesiones

Definición 12.7 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, una función acotada e integrable en sentido Riemann en $[a, b]$ y sea $\mathcal{P}$ una partición del intervalo con*

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

Si tomamos $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, se define la suma de Riemann de f en $[a, b]$ asociada a $\mathcal{P}$ a

$$S_R(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

De la definición ocurre claramente que

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$$

y por tanto

$$s(\mathcal{P}) \leq S_R(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P})$$

Está claro que si la función es integrable entonces el límite de $s(\mathcal{P})$ y de $S(\mathcal{P})$ coinciden cuando se hacen particiones cada vez más finas, por tanto, si f es integrable el límite de $S_R(\mathcal{P})$ también será el mismo (regla del Sandwich) y podemos poner

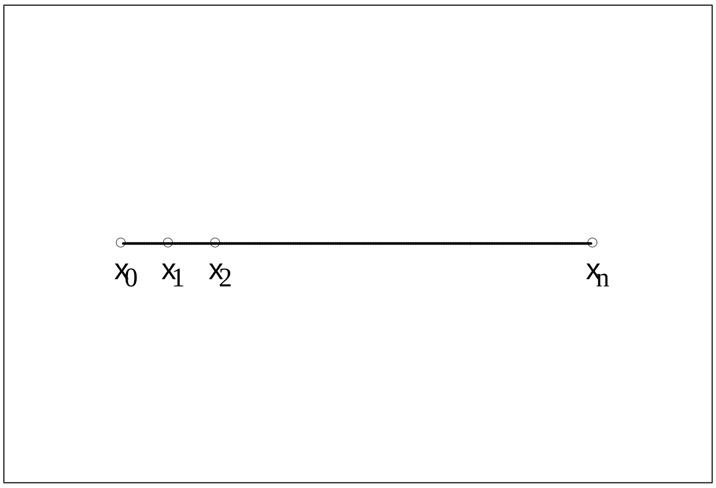
$$\lim S_R(\mathcal{P}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La ventaja que da el uso de las series de Riemann es que, si la función es integrable, entonces la partición que tomemos no importa y tampoco importará el punto que tomemos dentro de cada subintervalo en la partición, por tanto, se eligen particiones y puntos intermedios fáciles de manejar. La partición del intervalo se hará dividiendo el intervalo en n partes iguales

$$\mathcal{P}_n = \left\{ a = x_0, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b \right\}$$

es decir

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_k &= x_{k-1} + \frac{b-a}{n};\ k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$



lo que hace que su norma sea

$$\|\mathcal{P}_n\| = \frac{b-a}{n}$$

puesto que todos los subintervalos tienen la misma longitud. Notar que cuando $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{P}_n\| = 0$ Se toma como punto intermedio en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, alguno de los siguientes puntos

Extremo inferior del intervalo	$\xi_k = x_{k-1} = a + (k-1)\frac{b-a}{n}$	$k = 1, \ldots, n$
Extremo superior del intervalo	$\xi_k = x_k = a + k\frac{b-a}{n}$	$k = 1, \ldots, n$
Punto medio del intervalo	$\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}$	$k = 1, \ldots, n$

y siempre que f sea integrable en $[a, b]$ podemos poner

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)$$

Ejemplo 12.2 *Probar que $f(x) = e^x$ es integrable en $[0, 1]$ y calcular el valor de su integral mediante sumas de Riemann.*

Dividiremos el intervalo en n partes iguales, es decir,

$$\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

mientras que

$$x_k = a + k\frac{(b-a)}{n} = \frac{k}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n$$

y usaremos el extremo superior del intervalo como punto intermedio, es decir,

$$\xi_k = x_k \Rightarrow \xi_k = \frac{k}{n},\ k = 1, \ldots, n$$

de forma que

$$f(\xi_k) = e^{\xi_k} = e^{\frac{k}{n}}$$

y la suma de Riemann sería

$$S_R(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k$$

La suma es la de una progresión geométrica de razón $e^{\frac{1}{n}}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{1}{n}\frac{e^{\frac{n}{n}}e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Si ahora hacemos $n \to \infty$ *y recordamos la tabla de infinitésimos equivalentes*

$$e^x \sim 1 + x \ si\ x \to 0$$

luego como

$$\frac{1}{n} \to 0 \ si\ n \to \infty$$

sucede

$$e^{1/n} \sim 1 + \frac{1}{n} \ si\ n \to \infty$$

y por tanto

$$e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n}$$

sustituyendo en el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}}(e-1) = e - 1$$

12.2. Propiedades de las funciones integrables

Proposición 12.3 *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, acotada en* $[a,b]$*, entonces se cumple:*

1. *Si* $f \in \mathcal{C}([a,b]) \Longrightarrow f$ *es integrable en* $[a,b]$.
2. *Si* f *es monótona (creciente o decreciente)* $\Longrightarrow f$ *es integrable en* $[a,b]$.
3. *Si* f *es continua en* $[a,b]$ *salvo una cantidad finita de discontinuidades* $\Longrightarrow f$ *es integrable en* $[a,b]$.

Proposición 12.4 *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, integrable Riemann en* $[a,b]$*, entonces se cumple:*

1. *Si* $c \in (a,b) \Longrightarrow f$ *es integrable en* $[a,c]$ *y* $[c,b]$ *y además*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

.

2. *Si* $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha f$ *es integrable en* $[a,b]$ *y*

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. *Si* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *es otra función integrable Riemann en* $[a,b] \Longrightarrow f \pm g$ *es integrable en* $[a,b]$ *y además*

$$\int_a^b (f \pm g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

4. *Si* $f \geq 0$ *en* $[a,b] \Longrightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

5. *Si* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *es otra función integrable Riemann en* $[a,b]$ *con* $f(x) \leq g(x)$ *en* $[a,b] \Longrightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

6. $|f(x)|$ *es integrable en* $[a,b]$ *ySi* $f \geq 0$ *en* $[a,b] \Longrightarrow$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Observación 12.1 *Si* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *es otra función integrable Riemann en* $[a,b]$, *entonces el producto* $(f \cdot g)(x)$ *también es integrable en* $[a,b]$, *pero en general*

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

de hecho se cumple la Desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\left(\int_a^b (f \cdot g)(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)$$

12.3. Función integral. La regla de Barrow.

Definición 12.8 *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *integrable en* $[a,b]$, *definimos* función integral *asociada a* f *en* $[a,b]$ *a la función* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Es el valor de la integral definida de $f(x)$ *en el intervalo* $[a,x]$.

Teorema 12.5 (Primer teorema fundamental de Cálculo Integral) *Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es integrable en* $[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *es continua en* $[a,b]$.

Teorema 12.6 (Segundo teorema fundamental del Cálculo Integral) *Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en* $[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *es derivable en* $[a,b]$ *y se cumple* $F'(x) = f(x)$.

El teorema anterior establece a $F(x)$ como una primitiva de $f(x)$; de ahí que se utilice la misma notación tanto para cálculo de primitivas, como para integrales definidas.

Ejemplo 12.3 *Calcula la derivada de la siguiente función integral usando*

$$F(x) = \int_a^x \cos t^2 \; dt$$

La función $f(x) = \cos\left(t^2\right)$ *no tiene primitiva que pueda expresarse sin uso de integrales, es decir, no hay una función expresada mediante funciones elementales cuya derivada sea* $f(x)$. *Sin embargo como* $\cos x^2$ *es una función continua en* x, *entonces* $F(x)$ *es derivable y*

$$F'(x) = f(x) = \cos x^2$$

Proposición 12.7 (Regla de Barrow) *Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en* $[a,b]$ *y* $G(x)$ *es una primitiva de* $f(x) \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \equiv [G(x)]_{x=a}^{x=b} \equiv [G(x)]_a^b$$

Proposición 12.8 *Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en* $[a,b]$, *se cumple*

1.
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

2.
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Proposición 12.9 (Regla de la Cadena) *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en* $[a,b]$ *y sea* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *la correspondiente función integral. Si* $h_1, h_2 : [c,d] \to [a,b]$ *son funciones derivables en* $[c,d]$, *si definimos*

$$G(x) = F(h_2(x)) - F(h_1(x)) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)\,dt$$

entonces

$$G'(x) = F'(h_2(h))\,h_2'(x) - F'(h_1(h))\,h_1'(x)$$

Ejemplo 12.4 *Vamos a calcular la derivada de la función* $G(x)$ *definida como*

$$G(x) = \int_0^{x^3} \cos\left(t^2\right) dt$$

para ello utilizamos la proposición anterior

$$G'(x) = \cos\left(x^3\right) 3x^2$$

Ejemplo 12.5 *Vamos a calcular la derivada de la función $G(x)$ definida como*

$$G(x) = \int_{e^x}^{x^3} \cos\left(t^2\right) dt$$

para ello utilizamos la proposición anterior

$$G'(x) = \cos\left(x^3\right) 3x^2 - \cos\left(e^x\right) e^x.$$

Teorema 12.10 (Teorema de la Media Integral) *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, es continua en $[a,b] \Longrightarrow$ $\exists \xi \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b-a)$$

Ejercicio 1 *Interpreta gráficamente el teorema de la media.*

Ejemplo 12.6 *Probar que*

$$\int_1^2 \sqrt{1+x^3} \leq 3$$

Como $f(x) = \sqrt{1+x^3}$ es continua en $(1,2) \Rightarrow \exists \xi \in (1,2)$ tal que

$$\int_1^2 \sqrt{1+x^3} = \sqrt{1+\xi^3}\,(2-1) = \sqrt{1+\xi^3}$$

$$\xi \in (1,2) \Rightarrow 1 < \xi < 2 \Rightarrow \xi^3 < 2^3 = 8$$

luego

$$\sqrt{1+\xi^3} \leq \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3.$$

12.4. Métodos elementales de integración

Para integrales definidas los métodos de integración por partes y mediante cambio de variable sufre las siguientes modificaciones.

Recordemos que para el cálculo de la primitiva de una función mediante el método de integración por partes obteníamos

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = (u(x)\, v(x)) - \int u(x)\, v(x)\, dx$$

Cuando se aplica este método al caso de una integral definida se obtiene el siguiente resultado

Proposición 12.11 *Sea $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y tales que sus funciones derivadas u' y v' son integrables en $[a,b]$. Se cumple*

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x)|_a^b - \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx = (u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a)) - \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx$$

Ejemplo 12.7 *Vamos a calcular la siguiente integral definida mediante el método de integración por partes*

$$\int_0^1 xe^x dx$$

Al ser la función del integrando un producto de un polinomio por la función exponencial, tomaremos como función $u(x)$ el polinomio, es decir, $u(x) = x$, mientras que la función $v'(x)$ será la exponencial, $v'(x) = e^x$. De este modo tendremos $u'(x) = 1$ y $v(x) = e^x$, de modo que

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= x \cdot e^x\big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 1 \cdot e^x dx \\ &= e - e^x\big|_{x=0}^{x=1} = e - (e-1) = 1 \end{aligned}$$

12.4.1. Método de integración por cambio de variable

Recordemos que el método de cambio de variable para el cálculo de primitivas consiste en cambiar el integrando usando la regla de la cadena, para obtener una función cuya primitiva. En el caso de integrales definidas obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 12.12 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y $g : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, una función de clase $\mathcal{C}^1([\alpha,\beta])$ y tal que $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$. Entonces se cumple*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt.$$

Ejemplo 12.8 *Vamos a calcular la siguiente integral definida mediante el método de integración por partes*

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

La integral es de tipo radical que ya está expresado en la forma canónica, por tanto podemos hacer el cambio de variable

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow x = a \operatorname{sen} t \\ dx &= a \cos t \; dt \end{aligned}$$

En este caso

$$g(t) = a \operatorname{sen} t$$

así que

$$g(\alpha) = a \Rightarrow g(\alpha) = 0 \Rightarrow a \operatorname{sen} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$g(\beta) = b \Rightarrow g(\beta) = a \Rightarrow a \operatorname{sen} \beta = a \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}\,(a\cos t)\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt \\
&= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos 2t)}{2}dt = a^2\ \frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen}2t}{4}\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \\
&= a^2\left(\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+\frac{\operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{2}\right)}{4}\right)-\left(\frac{0}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2\cdot 0)}{4}\right)\right) \\
&= a^2\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Al definir la integral de Riemann o integral definida se ha considerado en todo momento a funciones acotadas en intervalos compactos. En esta sección vamos a dar algunos resultados de integración cuando alguno de estos elementos no está presente, o bien la función no es acotada en el intervalo, o bien el intervalo no es cerrado.

12.4.2. Integrales impropias de primera especie

Definición 12.9 *Sea $f:[a,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ una función integrable en cualquier intervalo compacto de la forma $[a,x]$ con $x\geq a$. Se define* integral impropia de primera especie, y *se representará como $\int_a^\infty f$, como el resultado del cálculo del siguiente límite*

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt$$

La integral es convergente *si este límite es finito y su valor es el valor de este límite, mientras que si el límite es infinito la integral impropia se dice divergente.*

Si $F(x)$ es una primitiva de f y usamos la regla de Barrow, podemos poner

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to\infty} F(x)-F(a)$$

Ejemplo 12.9 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_0^\infty e^{-x}dx$$

para ello calcularemos para cada $x\geq 0$ la integral definida

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=x} = -e^{-x}-\left(-e^0\right) = 1-e^{-x}$$

y calculamos ahora el límite cuando $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(1-e^{-x}\right) = 1-0$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = 1.$$

Ejemplo 12.10 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x}dx$$

para ello calcularemos para cada $x \geq 0$ *la integral definida*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \ln(1+t)|_{t=0}^{t=x} = -\ln(1+x) - \ln(1) = \ln(1+x)$$

y calculamos ahora el límite cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \ln(1+x) = \infty$$

luego podemos decir que la integral es divergente.

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = 1.$$

Ejemplo 12.11 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_0^\infty \frac{1}{4+x^2}dx$$

para ello calcularemos para cada $x \geq 0$ *la integral definida*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{4+t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)}dt = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}\Bigg|_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\arctan 0 = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}$$

y calculamos ahora el límite cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_0^\infty \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

Del mismo modo podemos trabajar con integrales impropias de la forma

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$

Definición 12.10 *Sea* $f :]-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función integrable en cualquier intervalo compacto de la forma* $[x, b]$ *con* $x \leq b$. *Se define* integral impropia de primera especie, y *se representará como* $\int_{-\infty}^b f$, *como el resultado del cálculo del siguiente límite*

$$\int_{-\infty}^b f = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\,dt$$

La integral es convergente *si este límite es finito y su valor es el valor de este límite, mientras que si el límite es infinito la integral impropia se dice divergente.*

Si $F(x)$ *es una primitiva de* f *y usamos la regla de Barrow, podemos poner*

$$\int_{-\infty}^b f = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

Ejemplo 12.12 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_{-\infty}^{0} \sqrt{e^x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{x}{2}}dx$$

para ello calcularemos para cada $x \leq 0$ la integral definida

$$\int_x^0 f(t)\,dt = \int_x^0 e^{\frac{t}{2}}dt = 2e^{\frac{t}{2}}\Big|_{t=x}^{t=0} = 2e^0 - \left(2e^{\frac{x}{2}}\right) = 2 - 2e^{\frac{x}{2}}$$

y calculamos ahora el límite cuando $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty} 2 - 2e^{\frac{x}{2}} = 2$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_{-\infty}^{0} \sqrt{e^x}dx = 2.$$

Finalmente también podemos definir la integral sobre toda la recta real como.

Definición 12.11 *Sea $f :]-\infty, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en cualquier intervalo compacto de la forma $[x, y]$ con $x \leq y$. Se define* integral impropia de primera especie, y *se representará como $\int_{-\infty}^{\infty} f$, como el resultado del cálculo del siguiente límite*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\,dt + \lim_{y\to-\infty} \int_a^y f(t)\,dt$$

con $a \in \mathbb{R}$. La integral es convergente *si ambos límites son finitos y su valor será la suma de esos dos límites, mientras que si alguno de los límites no existe o es infinito, la integral será divergente.*

Notar que el cálculo anterior no es equivalente a calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

que se denomina *Valor principal de $\int_{-\infty}^{\infty} f$.* que coincidirá con el valor de la integral, siempre que ésta sea convergente

Ejemplo 12.13 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{-x} + e^x}dx$$

Tomamos $a = 0$ y debemos comprobar si las siguientes integrales

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^{-x} + e^x}dx \text{ y } \int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^{-x} + e^x}dx$$

son convergentes. Para ello calcularemos para cada $x \in \mathbb{R}$ las siguientes integrales definidas

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{e^{-t} + e^t}dt$$

Buscamos una primitiva, para ello hacemos el cambio de variable $e^t = s \Rightarrow e^t dt = ds \Rightarrow dt = \frac{1}{e^t} ds = \frac{1}{s} ds$ *además* $e^{-t} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{s}$

$$\int \frac{1}{e^{-t} + e^t} dt = \int \frac{1}{\frac{1}{s} + s} \frac{1}{s} ds = \int \frac{1}{1 + s^2} ds = \arctan s$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{1}{e^{-t} + e^t} dt = \arctan e^t$$

Calcularemos la primera integral usando Barrow

$$\int_0^{\infty} f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{e^{-t} + e^t} dt = \lim_{x\to-\infty} \arctan e^x - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

y ahora la segunda

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \frac{1}{e^{-t} + e^t} dt = \lim_{x\to-\infty} 1 - \arctan e^x = \frac{\pi}{4} - 0$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{-x} + e^x} dx = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 12.14 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\ dx$$

Para ello elegimos $a = 0$ *y debemos comprobar si existen las integrales* $\int_{-\infty}^{0} x\ dx$ *y* $\int_0^{\infty} x\ dx$*. Una primitiva de* x *es* $F(x) = \frac{x^2}{2}$ *luego*

$$\int_{-\infty}^{0} x\ dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(0) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2} = \infty$$

No es necesario calcular el otro límite puesto que este es infinito.

Notar que si ahora calculamos el valor principal

$$V.P. = \lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} x\ dx = \lim_{x\to\infty} (F(x) - F(-x)) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{(-x)^2}{2}\right) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$$

que sí existe, pero la integral como hemos visto es divergente.

12.4.3. Integrales impropias de segunda especie

Definición 12.12 *Sea* $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *una función no acotada en* b*, pero acotada e integrable en cualquier intervalo compacto de la forma* $[a, x]$ *con* $a \leq x < b$*. Se define* integral impropia de segunda especie, y *se representará como* $\int_a^{b^-} f$*, como el resultado del cálculo del siguiente límite*

$$\int_a^{b^-} f = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$$

La integral es convergente *si este límite es finito y su valor es el valor de este límite, mientras que si el límite es infinito la integral impropia se dice divergente.*

Si $F(x)$ es una primitiva de f y usamos la regla de Barrow, podemos poner

$$\int_a^{b^-} f = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$$

Ejemplo 12.15 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

para ello calcularemos para cada $0 \le x < 2$ la integral definida

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}dt$$

Buscamos una primitiva, para ello se hace el cambio $x = 2\operatorname{sen} t$ y por tanto $dx = 2\cos t dt$, de modo que

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dt = \int \frac{1}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}}2\cos t dt = \int dt = t = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$$

y por tanto

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}dt = \operatorname{arcsen}\frac{t}{2}\Big|_{t=0}^{t=x} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} - \operatorname{arcsen} 0 = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$$

Si ahora calculamos el límite cuando $x \to 2^-$

$$\lim_{x\to b^-}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to 2^-}\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 12.16 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de primera especie*

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x}dx$$

para ello calcularemos para cada $x \ge 0$ la integral definida

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \ln(1+t)|_{t=0}^{t=x} = -\ln(1+x) - \ln(1) = \ln(1+x)$$

y calculamos ahora el límite cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\ln(1+x) = \infty$$

luego podemos decir que la integral es divergente.

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = 1.$$

Definición 12.13 *Sea $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función no acotada en a, pero acotada e integrable en cualquier intervalo compacto de la forma $[x,b]$ con $a < x \leq b$. Se define* integral impropia de segunda especie, y *se representará como $\int_{a^+}^{b} f$, como el resultado del cálculo del siguiente límite*

$$\int_{a^+}^{b} f = \lim_{x \to a^+} \int_{x}^{b} f(t)\,dt$$

La integral es convergente *si este límite es finito y su valor es el valor de este límite, mientras que si el límite es infinito la integral impropia se dice divergente.*

Si $F(x)$ es una primitiva de f y usamos la regla de Barrow, podemos poner

$$\int_{a^+}^{b} f = F(b) - \lim_{x \to a^+} F(x)$$

Ejemplo 12.17 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de segunda especie*

$$\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

que no está acotada en $x = 0$, puesto que anula el denominador. Buscamos una primitiva de la función del integrando, para ello hacemos el cambio de variable $x = t^2$ de modo que $\sqrt{x} = t$ y $dx = 2tdt$ quedando la integral como

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\ln t^2}{t} 2t\ dt = \int 4 \ln t\ dt$$

y esta última la hacemos por partes, tomando $u = \ln t$ y $v' = 4dt$, es decir $u' = \frac{1}{t}dt$ y $v = 4t$

$$\int 4 \ln t\ dt = 4t \ln t - \int 4t \frac{1}{t} dt = 4(t \ln t - t)$$

Deshacemos el cambio $t = \sqrt{x}$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 4\left(\sqrt{x} \ln \sqrt{x} - \sqrt{x}\right) = \left(2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x}\right) = F(x)$$

y tomamos límites cuando $x \to 0^+$

$$\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{x \to 0^+} \int_{x}^{1} f(t)\,dt = F(1) - \lim_{x \to 0^+} F(x) = -4 - \lim_{x \to 0^+} \left(2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x}\right)$$

El primer sumando del límite lo podemos calcular por L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x \to 0^+} -2\sqrt{x} = 0$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = -4.$$

Finalmente también podemos definir integrales impropias de segunda especie cuando la función no está definida, es no acotada, en un punto del interior del intervalo como sigue.

Definición 12.14 *Sea $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función no acotada en a, pero acotada e integrable en cualquier intervalo compacto de la forma $[x,b]$ con $a < x \leq b$. Se define* integral impropia de segunda especie, y *se representará como $\int_{a^+}^b f$, como el resultado del cálculo del siguiente límite*

$$\int_{a^+}^b f = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\, dt$$

Definición 12.15 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada e integrable $[a,b]$ salvo para $c \in (a,b)$, es decir, la función es acotada e integrable en cualquier intervalo compacto de la forma $[a,x]$ con $x < c$ y en cualquier intervalo de la forma $[x,b]$ con $x \geq c$. Se define* integral impropia de segunda especie, y *se representará como $\int_a^b f$, si existen las dos integrales impropias*

$$\int_a^{c^-} f(x)\, dx \;\; y \;\; \int_{c^+}^b f(x)\, dx$$

y el valor de la integral sería

$$\int_a^b f = \int_a^{c^-} f(x)\, dx + \int_{c^+}^b f(x)\, dx$$

La integral es divergente *si alguna de las dos integrales es divergentes.*

Notar que, como en el caso de las integrales impropias de primera especie, el cálculo anterior no es equivalente a calcular la integral directmente

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

que se denomina *Valor principal de $\int_{-\infty}^{\infty} f$.* que coincidirá con el valor de la integral, siempre que ésta sea convergente

Ejemplo 12.18 *Probaremos que la integral*

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

es divergente.

Si hacemos el cálculo directamente

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)}\bigg|_{x=0}^{x=3} = -\frac{1}{(3-1)} - \left(-\frac{1}{0-1}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

Sin embargo la función no está acotada en $x = 1$ puesto que el denominador se anula, así que demos comprobar qué ocurre en los intervalos $[0,1)$ y $(1,3]$, usamos el hecho de que $F(x) = -\frac{1}{(x-1)}$ es una primitiva de $f(x)$ para poner

$$\int_0^{1^-} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^-} F(x) - F(0) = \lim_{x \to 1^-} -\frac{1}{(x-1)} + 1 = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{x-1} = \infty$$

luego es divergente y no es necesario calcular la otra parte.

Ejemplo 12.19 *Vamos a calcular la siguiente integral impropia de segunda especie*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_{-1}^{1} x^{-1/3} dx$$

Es de segunda especie puesto que el denominador de la función se anula en $x = 0 \in (-1, 1)$. *Para ver si es convergente hay que estudiar qué ocurre en los intervalos* $[-1, 0)$ *y* $(0, 1]$ *Es fácil comprobar que* $F(x) = \frac{3}{2} x^{2/3}$ *es una primitiva del integrando. El cálculo de la primera integral usando Barrow es*

$$\int_{-1}^{0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{x \to 0^-} F(x) - F(-1) = \lim_{x \to 0^-} \frac{3}{2} x^{2/3} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

y ahora la segunda

$$\int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = F(1) - \lim_{x \to 0^+} F(x) = \frac{3}{2} - \lim_{x \to 0^+} \frac{3}{2} x^{2/3} = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

luego podemos decir que la integral es convergente y que

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right) = 0,$$

en este caso coincide con el valor que obtendríamos si calculamos el Valor Principal

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = F(1) - F(-1) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0,$$

pero este método no es correcto y debe hacerse de la forma anterior.

12.5. Aplicaciones del cálculo integral

12.5.1. Áreas de recintos planos

$$\int_{a}^{b} f(x) \, dx$$

$$\int_{a}^{b} |f(x)| \, dx$$

$$\int_{a}^{b} |f(x) - g(x)| \, dx$$

12.5.2. Volúmenes de revolución

El volumen obtenido al girar un área plana alrededor del eje OX es

$$V_{OX} = \pi \int_{a}^{b} [f(x)]^2 \, dx$$

El volumen obtenido al girar un área plana alrededor del eje OY es

$$V_{OY} = 2\pi \int_{a}^{b} x \cdot f(x) \, dx$$

12.5.3. Volumen de un sólido por secciones planas

$$V = \int_a^b A\,(x)\,dx$$

12.5.4. Longitud de una arco de curva plana

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'\,(x)]^2} dx$$

12.5.5. Área de una superficie de revolución