509101010-Matemáticas I - Grado en Ingeniería Química Industrial
18 de enero de 2021
Examen Parcial 2- Duración: 150 minutos

DATOS ALUMNO/A:

APELLIDOS: NOMBRE: DNI:

Firma:

OBSERVACIONES Y REQUISITOS

- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Rellena y entrega la hoja del enunciado.
- Pon el nombre y los apellidos en cada hoja de las respuestas.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca lápiz**.
- **Extracto de las reglas de la convocatoria:** Terminantemente prohibido el uso de móviles. **NO** se puede usar calculadora programable o con capacidades gráficas. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes a la prueba. **NO** se podrá abandonar el examen durante la primera media hora. **NO** se podrá salir del aula durante la realización de la prueba.

  Cualquier violación de estas reglas o acción irregular realizada durante la prueba será motivo de expulsión de la misma y una calificación final en la asignatura de 0.
- Justifica los razonamientos empleados. Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado serán considerados erróneos y puntuados con 0. Escribe con claridad.
- El examen está puntuado sobre 10.
- La nota del examen es el 35 % de la nota final, siempre que sea superior o igual a 4 sobre 10.
- Deja el examen en la mesa, uniendo los folios con el clip adjunto.

ENUNCIADO DEL EXAMEN

1. Se consideran en $\mathbb{R}^3$, junto con el producto escalar euclídeo, el siguiente subespacio vectorial:

$$U = \langle \{(1, 0, -1)\,; (0, 1, 1)\} \rangle$$

   $a)$ (**0.75 puntos**) Encuentra una base de $U^\perp$.

   $b)$ (**1.25 puntos**) Calcula la proyección ortogonal y la simetría ortogonal del vector $\overrightarrow{v} = (1, -1, -1)$ sobre U.

2. Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:

a) (**0.75 puntos**) ¿Existe una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, que cumpla $f(1,0,0) = (1,1)$, $f(0,1,0) = (2,-3)$, $f(0,0,1) = (-1,2)$ y $f(3,0,1) = (2,5)$? En caso afirmativo calcula la matriz asociada a las bases canónica $M_{C_3 \to C_2}(f)$, en caso contrario indica por qué no existe.

b) (**0.75 puntos**) Demuestra, aplicando los teoremas sobre funciones continuas correspondientes, que la ecuación $1 - x^2 = \tan x$, tiene una solución en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

3. Sea $f(x,y,z)$ el endomorfismo cuya expresión analítica está dada por la siguiente expresión

$$f(x,y,z) = (x + 2y + 3z, 2x + 4y + 6z, 3x + 6y + 9z)$$

a) (**0.75 puntos**) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) (**1.0 puntos**) Calcula una base de los subespacios $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$. ¿Es f inyectiva?¿Es f suprayectiva? Razona las respuestas.

c) (**0.75 puntos**) Halla la matriz $M_{B_1 \to B_2}(f)$ de f respecto de las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1,0,1); (1,-1,0); (0,0,1)\} \\ B_2 &= \{(1,1,1); (0,1,1); (0,1,0)\} \end{aligned}$$

4. Considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 3 & \alpha & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

a) (**1 puntos**) Estudia para qué valores del parámetro α, la matriz M es diagonalizable.

b) (**1.5 puntos**) Para $\alpha = 1$, encuentra una matriz diagonal semejante a M y las matrices de paso correspondientes.

5. (**1.5 puntos**) Calcula el desarrollo de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ en el punto $x_0 = 0$ y utiliza este desarrollo para aproximar el valor de $\sqrt[3]{1{,}1}$, obteniendo la menor cota posible del error cometido.