Matemáticas I - Grado en Ingeniería Química Industrial
30 de noviembre de 2017
MODELO A

1. **(1 punto)** Calcula $z_1 = \dfrac{(1+i)}{(1+i\sqrt{3})}$, expresando el resultado en forma binómica.

   Solución:
$$\frac{(1+i)}{(1+i\sqrt{3})} = \frac{(1+i)\,(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})\,(1-i\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

2. **(1 punto)** Calcula $z_2 = \left(1-i\sqrt{3}\right)^{10}$, expresando el resultado en forma binómica.

   Solución: Expresamos z_2 en forma polar
$$z_2 = 2e^{-i\pi/3} \text{ o } z_2 = 2e^{i5\pi/3}$$
y operamos
$$z_2^{10} = \left(2e^{i5\pi/3}\right)^{10} = 2^{10}e^{i\pi 50/3}$$
por otro lado
$$\frac{50\pi}{3} = 16\pi + \frac{2\pi}{3} = 8\,(2\pi) + \frac{2\pi}{3}$$
por tanto damos 8 vueltas a la circunferencia y nos quedaría
$$2^{10}e^{i\pi 50/3} = 2^{10}e^{i2\pi/3}$$
y en forma binómica sería:
$$2^{10}e^{i2\pi/3} = 2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^9 + i2^9\sqrt{3} = -512 + i512\sqrt{3}.$$

3. **(2 puntos)** Calcula $\sqrt[4]{-1}$ en $\mathbb{C}$ y expresa el resultado en las formas exponencial y binómica.

   Solución: Expresamos el radicando en forma polar
$$-1 = 1e^{i\pi}$$
y aplicamos la fórmula de las raíces n–ésimas
$$w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\varphi_k} \text{ con } \varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{ y } k = 0, 1, 2, \ldots n-1$$
en este caso
$$n = 4,\ \ |z| = 1,\ \ \theta = \pi \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[4]{1} = 1 \\ \varphi_k = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \ \ k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$
luego tendremos 4 raíces
$$\begin{aligned}
w_0 &= 1e^{i\pi/4} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
w_0 &= 1e^{i3\pi/4} = \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
w_0 &= 1e^{i5\pi/4} = \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
w_0 &= 1e^{i7\pi/4} = \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

4. **(2 puntos)** Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(0,2),(1,3)\}$ y $B' = \{(1,1),(1,-1)\}$. Halla la matriz de cambio de base de B' a B.

Solución: Buscamos $M_{B'\to B}$, luego hay que expresar los elemento de la base B' en términos de la base B,es decir,si ponemos $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{v_1, v_2\}$, entonces buscamos 4 escalares a, b, c, d de forma que

$$\begin{aligned} v_1 &= au_1 + bu_2 \\ v_2 &= cu_1 + du_2 \end{aligned}$$

y en este caso la matriz buscada será

$$M_{B'\to B} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Para calcular estos valores, sólo hay que sustituir los vectores y resolver los sistemas que aparecen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2a+3b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 = b \\ 1 = 2a+3b \end{array} \right. \Leftrightarrow a = -1, b = 1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= c\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 2c+3d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 = d \\ -1 = 2c+3d \end{array} \right. \Leftrightarrow c = -2, d = 1 \end{aligned}$$

La matriz buscada será

$$M_{B'\to B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Se consideran en $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar euclídeo, los siguientes subespacios:

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right. \quad \text{y } W = <(2,0,1),(0,4,-1)>$$

   a) **(1 punto)** Encuentra una base, las ecuaciones implícitas y las ecuaciones paramétricas de ambos subespacios, U y W.
   b) **(1 punto)** Encuentra mediante el método de Gram–Schmidt una base ortonormal de W.
   c) **(1 punto)** Calcula la proyección ortogonal del vector $v = (3,2,1)$ sobre U.
   d) **(1 punto)** Calcula una base de $U \cap W$. ¿Es directa la suma $U + W$?

Solución:

   a) Para el subespacio U, ya tenemos las ecuaciones implícitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right.$$

Con estas ecuaciones obtenemos las ecuaciones paramétricas de U, resolviendo el sistema correspondiente: De la segunda ecuación

$$x - z = 0 \Rightarrow x = z$$

y sustituyendo en la primera

$$x - y + z = 0 \Rightarrow x + z = y \Rightarrow 2x = y$$

y si usamos un parámetro, por ejemplo α, para x

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= 2x = 2\alpha \\ z &= x = \alpha \end{aligned}$$

Las soluciones serán de la forma

$$(\alpha, 2\alpha, \alpha) = \alpha\,(1,2,1)$$

lo que nos proporciona una base para U, $B_U = \{u = (1,2,1)\}$

$$U = \langle (1,2,1) \rangle .$$

Para el subespacio W, ya tenemos la base

$$W =< (2,0,1),(0,4,-1) > \Longrightarrow B_W = \{w_1 = (2,0,1)\, ; w_2 = (0,4,-1)\}$$

que nos permite construir las ecuaciones paramétricas

$$(x,y,z) = \alpha\,(2,0,1) + \beta\,(0,4,-1) \iff \left\{ \begin{array}{c} x = 2\alpha \\ y = 4\beta \\ z = \alpha - \beta \end{array} \right.$$

Y con estas ecuaciones paramétricas obtendremos la implícita

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 2\alpha \Longrightarrow \alpha = \dfrac{x}{2} \\ y = 4\beta \Longrightarrow \beta = \dfrac{y}{4} \\ z = \alpha - \beta \Longrightarrow z = \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} \end{array} \right.$$

es decir

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{4} - z = 0 \iff 2x - y - 4z = 0.$$

b) A partir de la base de W que nos proporciona el enunciado

$$B' = \{w_1 = (2,0,1)\, ; w_2 = (0,4,-1)\}$$

construímos la base ortogonal $B'_W = \{w'_1; w'_2\}$ mediante el método de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} w'_1 &= w_1 = (2,0,1) \\ w'_2 &= w_2 + \alpha w'_1 = (0,4,-1) + \alpha\,(2,0,1) = (2\alpha, 4, \alpha - 1) \end{aligned}$$

eligiendo α de forma que $\left\langle w'_1; w'_2 \right\rangle = 0$

$$\left\langle w'_1; w'_2 \right\rangle = \langle (2,0,1)\, ; (2\alpha, 4, \alpha-1) \rangle = 4\alpha + (\alpha - 1) = 0 \iff 5\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{5},$$

de modo que

$$w'_2 = \left(\frac{2}{5}, 4, -\frac{4}{5} \right).$$

Se obtiene la base ortonormal pedida (b.o.n.) $B''_W = \{w''_1; w''_2\}$ dividiendo cada vector por su norma

$$\begin{aligned} w''_1 &= \frac{w'_1}{\|w'_1\|} = \frac{w'_1}{\left\langle w'_1; w'_1 \right\rangle^{1/2}} = \frac{(2,0,1)}{\langle (2,0,1)\, ; (2,0,1) \rangle^{1/2}} = \frac{(2,0,1)}{\sqrt{4+1}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ w''_2 &= \frac{w'_2}{\|w'_2\|} = \frac{w'_2}{\left\langle w'_2; w'_2 \right\rangle^{1/2}} = \frac{\left(\frac{2}{5}, 4, -\frac{4}{5}\right)}{\left\langle \left(\frac{2}{5}, 4, -\frac{4}{5}\right); \left(\frac{2}{5}, 4, -\frac{4}{5}\right) \right\rangle^{1/2}} = \frac{\left(\frac{2}{5}, 4, -\frac{4}{5}\right)}{\frac{2}{5}\sqrt{105}} = \left(\frac{1}{\sqrt{105}}, \frac{10}{\sqrt{105}}, -\frac{2}{\sqrt{105}} \right) \end{aligned}$$

c) Como sabemos $\mathbb{R}^3 = U + U^\perp$, de forma que

$$v = (3,2,1) = u_1 + u_2, \quad \text{con } u_1 \in U \text{ y } u_2 \in U^\perp$$

el enunciado nos pide el cálculo de u_1. Por una parte y como $u_1 \in U = \langle (1,2,1) \rangle$ entonces se tiene que si $u = (1,2,1)$

$$u_1 = \alpha u = \alpha\,(1,2,1) = (\alpha, 2\alpha, \alpha)$$

por otra sabemos que como $u_2 \in U^{\perp}$, entonces

$$\langle u; u_2 \rangle = 0$$

de este modo si calculamos $\langle v; u \rangle$, o

$$\langle v; u \rangle = \langle u_1 + u_2; u \rangle = \langle u_1; u \rangle + \langle u_2; u \rangle = \langle u_1; u \rangle$$

y calculando los productos escalares correspondientes

$$\begin{aligned} \langle v; u \rangle &= \langle (3,2,1) ; (1,2,1) \rangle = 3 + 4 + 1 = 8 \\ \langle u_1; u \rangle &= \langle (\alpha, 2\alpha, \alpha) ; (1,2,1) \rangle = \alpha + 4\alpha + \alpha = 6\alpha \end{aligned}$$

Por tanto

$$8 = 6\alpha \iff \alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

y la proyección buscada será

$$u_1 = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

Aunque no se pide la proyección ortogonal sobre $U^{\perp}$ sería

$$u_2 = v - u_1 = (3,2,1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3} \right) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

y podemos comprobar que

$$\langle u_1; u_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3} \right) ; \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\rangle = \frac{20}{9} - \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = 0$$

d) Para calcular una base $U \cap W$ podemos, por ejemplo, utilizar las ecuaciones implícitas de U y W

$$\begin{aligned} U \cap W &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \quad (x,y,z) \in U \text{ y } (x,y,z) \in W \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \quad x - y + z = 0,\, x - z = 0,\, 2x - y - 4z = 0 \right\} \end{aligned}$$

Tendremos que resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y - 4z = 0 \end{array} \right.$$

De las dos primeras ecuaciones (ver apartado a) sabemos que $y = 2x$ y que $z = x$ y sustituyendo en la tercera

$$2x - y - 4z = 0 \iff 2x - 2x - 4x = 0 \iff x = 0$$

luego el vector nulo $(0,0,0)$ es la única solución

$$U \cap W = \{0\}$$

de donde

$$\dim (U \cap W) = 0$$

y la fórmula de las dimensiones nos da

$$\dim (U + W) = \dim (U) + \dim (W) - \dim (U \cap W) = 1 + 2 - 0 = 3$$

luego la suma es directa

$$U + W = U \oplus W.$$