509101010-Matemáticas I - Grado en Ingeniería Química Industrial
21 de noviembre de 2020
Examen Parcial 1- Duración: 2 horas - Soluciones

DATOS ALUMNO/A:

APELLIDOS: NOMBRE: DNI:

Firma:

OBSERVACIONES Y REQUISITOS

- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Rellena y entrega la hoja del enunciado.
- Pon el nombre y los apellidos en cada hoja de las respuestas.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca lápiz**.
- **Extracto de las reglas de la convocatoria:** Terminantemente prohibido el uso de móviles. **NO** se puede usar calculadora programable o con capacidades gráficas. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes a la prueba. **NO** se podrá abandonar el examen durante la primera media hora. **NO** se podrá salir del aula durante la realización de la prueba.

  Cualquier violación de estas reglas o acción irregular realizada durante la prueba será motivo de expulsión de la misma y una calificación final en la asignatura de 0.
- Justifica los razonamientos empleados. Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado serán considerados erróneos y puntuados con 0. Escribe con claridad.
- El examen está puntuado sobre 10.
- La nota del examen es el 35 % de la nota final, siempre que sea superior o igual a 4 sobre 10.
- Deja el examen en la mesa, uniendo los folios con el clip adjunto.

ENUNCIADO DEL EXAMEN

1. (**1 punto**). Encuentra en $\mathbb{C}$ todas las soluciones en forma binómica de la ecuación

$$z^3 + 1 = 0,$$

y comprueba que la suma de esas soluciones es 0 y que su producto es -1.

Solución: El problema consiste en encontrar los complejos $z \in \mathbb{C}$, que cumplen $z^3 + 1 = 0 \Longleftrightarrow z^3 = -1$, es decir, $z = \sqrt[3]{-1}$. Hay que poner el complejo en forma polar $-1 = 1_\pi$ es decir $|z| = 1$ y $\theta_z = \pi$. Las raíces son $w_k = |w_k|_{\varphi_k}$, donde

$$\begin{aligned} |w_k| &= \sqrt[3]{|z|} = \sqrt[3]{1} = 1, \\ \varphi_k &= \frac{\theta_z + 2k\pi}{3} = \frac{\pi + 2k\pi}{3}, \; k = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

Tendremos 6 raíces

$$\begin{aligned}
w_0 &= 1_{\frac{\pi}{3}} = 1e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
w_1 &= 1_{\pi} = 1e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1, \\
w_2 &= 1_{5\pi/3} = 1e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},
\end{aligned}$$

2. (**1 punto**).Calcula el valor de a y b para que el número

$$\frac{3b-2ai}{4-3i}$$

sea un número real de módulo unidad.

Solución: Expresamos el número en forma binómia

$$\frac{3b-2ai}{4-3i} = \frac{3b-2ai}{4-3i}\frac{4+3i}{4+3i} = \frac{(3b-2ai)(4+3i)}{16+9} = \frac{(12b+6a)}{25} + i\frac{(9b-8a)}{25}$$

para que el número sea real, su parte imaginaria debe ser 0

$$\frac{(9b-8a)}{25} = 0 \Longleftrightarrow 9b-8a = 0 \Longleftrightarrow b = \frac{8}{9}a$$

Y su módulo debe ser 1, teniendo en cuenta que la parte imaginaria es 0

$$\left|\frac{(12b+6a)}{25} + i\frac{(9b-8a)}{25}\right| = \left|\frac{(12b+6a)}{25}\right| = 1 \Longleftrightarrow \frac{|(12b+6a)|}{25} = 1 \Longleftrightarrow |(12b+6a)| = 25$$

Por tanto debe ocurrir

$$12b+6a = 25 \Leftrightarrow 12\left(\frac{8}{9}\right)a + 6a = 25 \Leftrightarrow \frac{50}{3}a = 25 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

o bien

$$12b+6a = -25 \Leftrightarrow 12\left(\frac{8}{9}\right)a + 6a = -25 \Leftrightarrow \frac{50}{3}a = -25 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

y la solución sería

$$\begin{aligned}
a &= \frac{3}{2} \\
b &= \frac{8}{9}a = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{3}{2} \\
b &= \frac{8}{9}a = -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Otra forma de resolver el problema es la siguiente. Puesto que el número es real y su módulo es 1, ese número sólo puede ser el 1 o el -1, es decir

$$\frac{3b-2ai}{4-3i} = 1 \Leftrightarrow (3b-2ai) = (4-3i) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3b = 4 \\ \\ -2a = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = \frac{4}{3} \\ \\ a = \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

o

$$\frac{3b-2ai}{4-3i} = -1 \Leftrightarrow (3b-2ai) = -(4-3i) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3b = -4 \\ \\ -2a = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -\frac{4}{3} \\ \\ a = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

3. Indica, razonando adecuadamente las respuestas

   a) (**1 punto**) Sea V un espacio vectorial, y consideremos U y W dos subespacios vectoriales de V. Demuestra que la intersección $U \cap W$ también es un subespacio vectorial de V.

   b) Consideremos el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$, indica de forma razonada, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones

      1) (**0.5 puntos**). Si tres vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ cumplen $4\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 - \vec{u}_3 = 0$, entonces $\dim \langle\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}\rangle \leq 2$

      2) (**0.5 puntos**). El subconjunto $H : \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 1\right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

   a) Hay que comprobar que si $\vec{u}, \vec{v} \in U \cap W$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces debe ocurrir $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in U \cap W$

$$\vec{u}, \vec{v} \in U \cap W \Longrightarrow \vec{u}, \vec{v} \in U \Longrightarrow \text{ (Como } U \text{ es subespacio vectorial) } \Longrightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in U$$

$$\vec{u}, \vec{v} \in U \cap W \Longrightarrow \vec{u}, \vec{v} \in W \Longrightarrow \text{ (Como } W \text{ es subespacio vectorial) } \Longrightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in W$$

   y por tanto como $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ está en U y en W

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in U \cap W$$

      1) La afirmación es cierta puesto que se cumple $4\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 - \vec{u}_3 = 0$, que es una combinación lineal de los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y no todos los coeficientes son nulos, de hecho, ningún coeficiente es nulo, por tanto el sistema $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es linealmente dependiente y tendría una rango menor que el número de vectores, es decir, su rango debe ser 2 o menos.

      2) La afirmación es falsa puesto que el vector nulo $\vec{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ no está en H, puesto que

$$0 + 0 = 0 \neq 1$$

4. (**1.5 punto**). Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$:

$$B_1 = \{(2, 0), (3, 1)\}$$

y

$$B_2 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$$

Hallar las matrices de cambio de base $M_{B_1 \to B_2}$ y $M_{B_2 \to B_1}$. Encuentra la representación del vector $\vec{v} = (1, -1)$ en ambas bases.

Solución: Podemos utilizar sistemas de cuaciones para expresar los vectores de la base B_1 en términos de la base B_2

$$\begin{aligned}
(2, 0) &= \alpha(1, 1) + \beta(-1, 1) = (\alpha - \beta, \alpha + \beta) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - \beta = 2 \\ \\ \alpha + \beta = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha = 1; \beta = -1, \\
(3, 1) &= \gamma(1, 1) + \delta(-1, 1) = (\gamma - \delta, \gamma + \delta) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma - \delta = 3 \\ \\ \gamma + \delta = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \gamma = 2; \delta = -1,
\end{aligned}$$

de modo que

$$M_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

O podemos hacerlo mediante matrices y el uso de la base canónica

$$\begin{aligned}
M_{B_1 \to B_2} &= M_{C \to B_2} M_{B_1 \to C} = (M_{B_2 \to C})^{-1} M_{B_1 \to C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Para obtener $M_{B_2\to B_1}$ podemos repetir el mismo proceso que antes o tener en cuenta que esta matriz es la inversa de la matriz anterior.

$$M_{B_2\to B_1} = (M_{B_1\to B_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular las coordenadas del vector $\vec{v} = (1,-1)$ en la base B_1 usaremos sistemas de ecuaciones

$$(1,-1) = \alpha\,(2,0) + \beta\,(3,1) = (2\alpha+3\beta,\beta) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + 3\beta = 1 \\ \\ \quad \beta = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha = 2; \beta = -1$$

Es decir

$$\vec{v}_{B_1} = (2,-1)$$

Para encontrar las coordenadas en la base B_2 usaremos la matriz $M_{C\to B_2}$

$$\vec{v}_{B_2} = M_{C\to B_2}\vec{v} = (M_{B_2\to C})^{-1}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_{B_2} = (0,-1)$$

Notar que es posible resolver el problema usando sólo sistemas de ecuaciones, sólo matrices o como en este caso una mezcla de ambos procedimientos.

5. Se consideran en $\mathbb{R}^4$, junto con el producto escalar euclídeo, los siguientes subespacios vectoriales

$$U = \langle (1,0,1,0); (1,1,0,1); (1,2,2,1) \rangle \qquad V = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \middle| \quad x - y - z + t = 0 \right\}$$

   a) **(1 punto)**. Encuentra las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio U.
   b) **(1 punto)**. Encuentra las ecuaciones paramétricas y una base de V.
   c) **(1 punto)**. Calcula una base para los subespacios $U+V$ y $U\cap V$.
   d) **(1.5 puntos)**. Obtén mediante el método de Gram-Schmidt una base ortonormal para el subespacio U.

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas se obtiene fácilmente planteando las combinaciones lineales de los vectores dados

$$(x,y,z,t) \in U \Leftrightarrow (x,y,z,t) = \alpha\,(1,0,1,0) + \beta\,(1,1,0,1) + \gamma\,(1,2,2,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = \alpha+\beta+\gamma & (1) \\ y = \beta + 2\gamma & (2) \\ z = \alpha + 2\gamma & (3) \\ t = \beta+\gamma & (4) \end{array} \right.$$

Las ecuaciones implícitas se pueden obtener fácilmente escalonando la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 1 & 0 & 2 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 0 & -1 & 1 & z-x \\ 0 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & 3 & y+z-x \\ 0 & 0 & -1 & t-y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & 3 & y+z-x \\ 0 & 0 & -3 & 3t-3y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & 3 & y+z-x \\ 0 & 0 & 0 & 3t-2y+z-x \end{pmatrix}$$

la ecuación será

$$3t - 2y + z - x = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z - 3t = 0$$

O también se puede obtener operando sobre las ecuaciones

$$(1) - (4) \quad \Rightarrow \qquad x - t = \alpha$$

$$(2) - (3) \quad \Rightarrow \quad y - z = \beta - \alpha \quad \Rightarrow \quad y - z = \beta - (x-t) \quad \Rightarrow \quad x + y - z - t = \beta$$

$$(2) - (4) \quad \Rightarrow \qquad y - t = \gamma$$

y sustituyendo en (1)

$$\begin{aligned} x &= \alpha+\beta+\gamma \\ &= (x-t)+(x+y-z-t)+(y-t) \\ &= 2x+2y-z-3t \end{aligned}$$

que nos conduce a la misma ecuación que antes

$$x = 2x+2y-z-3t \Rightarrow x+2y-z-3t=0$$

.

b) Para encontrar las ecuaciones paramétricas utilizamos la ecuación implícita de V

$$x-y-z+t=0$$

como hay una ecuación y 4 variables, necesitaremos $4-1=3$ parámetros, así que tomamos

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \beta \\ z &= \gamma \end{aligned}$$

y por tanto

$$t = z+y-x = \gamma+\beta-\alpha$$

A partir de estas ecuaciones obtendremos una base puesto que

$$(x,y,z,t) = (\alpha,\beta,\gamma,-\alpha+\beta+\gamma) = \alpha\,(1,0,0,-1)+\beta\,(0,1,0,1)+\gamma\,(0,0,1,1)$$

y por tanto

$$V = \langle\{(1,0,0,-1)\,;(0,1,0,1)\,;(0,0,1,1)\}\rangle$$

c) Para encontrar una base de $U\cap W$ utilizaremos las ecuaciones implícitas de los dos subespacios, para que un vector esté en la interesección, debe estar en cada uno de los conjuntos, y por tanto, se debe cumplir las ecuaciones implícitas de cada subespacio

$$U\cap W = \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \middle| \quad x+2y-z-3t=0 \text{ y } x-y-z+t=0\right\}$$

Como son 2 ecuaciones independientes, necesitaremos 2 parámetros para construir las ecuaciones paramétricas. Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$(x+2y-z-3t)-(x-y-z+t)=0 \Leftrightarrow 3y-4t=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{4}y$$

Y sustituyendo en la segunda

$$x-y-z+t=0 \Rightarrow x-y-z+\frac{3}{4}y=0 \Leftrightarrow x-\frac{1}{4}y-z=0 \Leftrightarrow z=x-\frac{1}{4}y$$

Si tomamos $x=\alpha$ e $y=\beta$, tendremos

$$\begin{aligned} z &= \alpha-\frac{1}{4}\beta \\ t &= \frac{3}{4}\beta \end{aligned}$$

que nos da las ecuaciones paramétricas

$$(x,y,z,t) = \left(\alpha,\beta,\alpha-\frac{1}{4}\beta,\frac{3}{4}\beta\right) = \alpha\,(1,0,1,0)+\beta\left(0,1,-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$$

y obtendremos una base de $U \cap W$

$$U \cap W = \langle \{(1,0,1,0)\,;(0,4,-1,3)\} \rangle$$

donde hemos multiplicado el segundo vector por 2. Se deduce por tanto que

$$\dim (U \cap W) = 2$$

y usando la ecuación de dimensiones

$$\dim (U+W) = \dim (U) + \dim (W) - \dim (U \cap W) = 3+3-2 = 4$$

luego está claro que

$$U + W = \mathbb{R}^4$$

y podemos tomar como base la canónica de $\mathbb{R}^4$. La suma no es directa puesto que $U \cap W \neq \left\{\vec{0}\right\}$.

d) Definimos

$$\vec{u}_1 = (1,0,1,0), \qquad \vec{u}_2 = (1,1,0,1), \qquad \vec{u}_3 = (1,2,2,1)\,.$$

Usamos Gram-Schmidt para construir la base ortogonal. El primer vector de la base ortogonal es el mismo que para la base inicial

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (1,0,1,0).$$

Los siguientes vectores se construyen usando el vector equivalente de la base original y una combinación lineal de los vectores anteriores

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \alpha\vec{v}_1 = (1,1,0,1) + \alpha_{21}(1,0,1,0),$$

y elegimos el parámetro α_{21} de forma que el vector resultante sea ortogonal con los anteriores

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle \vec{u}_2 + \alpha_{21}\vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{u}_2; \vec{v}_1 \rangle + \alpha_{21} \langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha_{21} = -\frac{\langle \vec{u}_2, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle}, \\
\alpha_{21} &= -\frac{\langle (1,1,0,1);(1,0,1,0) \rangle}{\langle (1,0,1,0);(1,0,1,0) \rangle} = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\vec{v}_2 = (1,1,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,1,0) = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Por comodidad tomaremos el vector $2\vec{v}_2$ como segundo vector de la base ortogonal, es decir tomaremos

$$\vec{v}_2 = (1,2,-1,2)$$

Repetimos el proceso para el siguiente vector de la base ortogonal usando el vector equivalente de la base original y una combinación lineal de los vectores que hemos obtenido en el paso anterior

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 + \alpha_{31}\vec{v}_1 + \alpha_{32}\vec{v}_2 = (1,2,2,1) + \alpha_{31}(1,0,1,0) + \alpha_{32}\,(1,2,-1,2)\,,$$

y elegimos los parámetros α_{31} y α_{32} de forma que $\vec{v}_3$ sea ortogonal con $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, teniendo en cuenta que $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ y por tanto $\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle = 0$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}_3, \vec{v}_1 \rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle \vec{u}_3 + \alpha_{31}\vec{v}_1 + \alpha_{32}\vec{v}_2; \vec{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{u}_3; \vec{v}_1 \rangle + \alpha_{31} \langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle + \alpha_{32} \langle \vec{v}_2; \vec{v}_1 \rangle = 0, \\
\langle \vec{u}_3; \vec{v}_1 \rangle + \alpha_{31} \langle \vec{v}_1; \vec{v}_1 \rangle &= 0 \Leftrightarrow \alpha_{31} = -\frac{\langle \vec{u}_3, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} = -\frac{\langle (1,2,2,1)\,;(1,0,1,0) \rangle}{\langle (1,0,1,0);(1,0,1,0) \rangle} = -\frac{3}{2}. \\
\langle \vec{v}_3, \vec{v}_2 \rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle u_3 + \alpha_{31}\vec{v}_1 + \alpha_{32}\vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u_3; \vec{v}_2 \rangle + \alpha_{31} \langle \vec{v}_1; \vec{v}_2 \rangle + \alpha_{32} \langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle = 0, \\
\langle u_3; \vec{v}_2 \rangle + \alpha_{32} \langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle &= 0 \Leftrightarrow \alpha_{32} = -\frac{\langle u_3, \vec{v}_2 \rangle}{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle} = -\frac{\langle (1,2,2,1)\,;(1,2,-1,2) \rangle}{\langle (1,2,-1,2)\,;(1,2,-1,2) \rangle} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\vec{v}_3 = (1,2,2,1) - \frac{3}{2}(1,0,1,0) - \frac{1}{2}\,(1,2,-1,2) = (-1,1,1,0)\,.$$

Para conseguir la base ortonormal dividiremos cada vector por su norma

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,0,1,0)}{\sqrt{\langle(1,0,1,0);(1,0,1,0)\rangle}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\\
w_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(1,2,-1,2)}{\sqrt{\langle(1,2,-1,2)\,;(1,2,-1,2)\rangle}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}}\right),\\
w_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{(-1,1,1,0)}{\sqrt{\langle(-1,1,1,0)\,;(-1,1,1,0)\rangle}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0\right).
\end{aligned}$$