509101010-Matemáticas I - Grado en Ingeniería Química Industrial
18 de enero de 2021
Examen Parcial 2- Duración: 150 minutos - Soluciones

DATOS ALUMNO/A:

APELLIDOS: NOMBRE: DNI:

Firma:

OBSERVACIONES Y REQUISITOS

- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Rellena y entrega la hoja del enunciado.
- Pon el nombre y los apellidos en cada hoja de las respuestas.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca lápiz**.
- **Extracto de las reglas de la convocatoria:** Terminantemente prohibido el uso de móviles. **NO** se puede usar calculadora programable o con capacidades gráficas. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes a la prueba. **NO** se podrá abandonar el examen durante la primera media hora. **NO** se podrá salir del aula durante la realización de la prueba.

  Cualquier violación de estas reglas o acción irregular realizada durante la prueba será motivo de expulsión de la misma y una calificación final en la asignatura de 0.
- Justifica los razonamientos empleados. Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado serán considerados erróneos y puntuados con 0. Escribe con claridad.
- El examen está puntuado sobre 10.
- La nota del examen es el 35 % de la nota final, siempre que sea superior o igual a 4 sobre 10.
- Deja el examen en la mesa, uniendo los folios con el clip adjunto.

ENUNCIADO DEL EXAMEN

1. Se consideran en $\mathbb{R}^3$, junto con el producto escalar euclídeo, el siguiente subespacio vectorial:

$$U = \langle \{(1, 0, -1) \,;(0, 1, 1)\} \rangle$$

   a) (**0.75 puntos**) Encuentra una base de $U^\perp$.

   b) (**1.25 puntos**) Calcula la proyección ortogonal y la simetría ortogonal del vector $\overrightarrow{v} = (1, -1, -1)$ sobre U.

   Solución:

a) Por las propiedades de $U^{\perp}$ tendremos

$$\dim\left(U^{\perp}\right)=\dim\left(\mathbb{R}^{3}\right)-\dim\left(U\right)=3-2=1$$

Luego necesitamos un único vector para construir $U^{\perp}$ que será de la forma $\overrightarrow{v}_3=(x,y,z)$. Este vector debe ser ortonormal a los elementos de la base de U, luego

$$\begin{aligned}\langle\overrightarrow{v}_3,\overrightarrow{v}_1\rangle &= 0\Leftrightarrow\langle(x,y,z),(1,0,-1)\rangle=0\Leftrightarrow x-z=0\\ \langle\overrightarrow{v}_3,\overrightarrow{v}_2\rangle &= 0\Leftrightarrow\langle(x,y,z),(0,1,1)\rangle=0\Leftrightarrow y+z=0\end{aligned}$$

De la primera ecuación $x=z$ y de la segunda $y=-z$ y el vector es de la forma

$$\vec{v}_3=(z,-z,z)=z\,(1,-1,1)$$

luego

$$U^{\perp}=\langle(1,-1,1)\rangle$$

b) Sea $\overrightarrow{v}=(1,-1,-1)\in\mathbb{R}^3$, entonces podemos poner

$$\vec{v}=\vec{u}+\vec{w},\ \ \vec{u}\in U,\vec{w}\in U^{\perp}$$

El enunciado nos piden la proyección ortogonal y la simetría ortogonal de base U, es decir, nos piden

$$\text{Proyección ortogonal }\ \Rightarrow\pi_U\left(\vec{v}\right)=\vec{u}$$

$$s_U(\vec{v})=\vec{u}-\vec{w}.$$

Sabemos que $\vec{u}$ es la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre U, mientras que $\vec{w}$ será la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $U^{\perp}$. Como $\dim\left(U^{\perp}\right)=1$ y hemos encontrado una base en el apartado anterior necesitaremos hacer menos operaciones si calculamos $\vec{w}$.
Por una parte

$$\vec{w}\in U^{\perp}\Rightarrow\vec{w}=\alpha\,(1,-1,1)\,,\alpha\in\mathbb{R}$$

Vamos a calcular α, para ello multiplicamos el vector $\vec{v}$ por los elementos de la base de $U^{\perp}$, en este caso uno solo

$$\langle\vec{v},\vec{v}_3\rangle=\langle\vec{u}+\vec{w},\vec{v}_3\rangle$$

usando la propiedad de bilinealidad de $\langle\cdot\rangle$

$$\langle\vec{u}+\vec{w},\vec{v}_3\rangle=\langle\vec{u},\vec{v}_3\rangle+\langle\vec{w},\vec{v}_3\rangle$$

y utilizando que $\vec{u}\perp\vec{v}_3$, puesto que $\vec{u}\in U$ y $\vec{v}_3\in U^{\perp}$

$$\langle\vec{u},\vec{v}_3\rangle+\langle\vec{w},\vec{v}_3\rangle=0+\langle\vec{w},\vec{v}_3\rangle=\langle\vec{w},\vec{v}_3\rangle$$

es decir

$$\langle\vec{v},\vec{v}_3\rangle=\langle\vec{w},\vec{v}_3\rangle$$

y sustituyendo los vectores que conocemos

$$\begin{aligned}\langle(1,-1,-1)\,,(1,-1,1)\rangle &= \langle\alpha\,(1,-1,1)\,,(1,-1,1)\rangle=\alpha\,\langle(1,-1,1)\,,(1,-1,1)\rangle\\ 1 &= \alpha 3\\ \alpha &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Y calculamos $\vec{w}$

$$\vec{w}=\alpha\,(1,-1,1)=\frac{1}{3}\,(1,-1,1)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

con este valor podemos calcular $\vec{u}$, la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre U

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{w} = (1,-1,-1) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

y la simetría $s_U(\vec{v})$ puesto que

$$s_U(\vec{v}) = \vec{u} - \vec{w} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

***NOTA*:** *Este apartado también se podría resolver sin conocer la base de $U^\perp$ ya que podemos calcular directamente la proyección ortogonal sobre U, es decir, el vector $\vec{u}$. Para ello tenemos en cuenta que $\vec{u} \in U$ y por tanto*

$$\vec{u} = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,1) = (\alpha, \beta, \beta - \alpha)$$

y calcularemos el valor del producto escalar $\vec{v}$ por cada elemento de la base de U. Usando la propiedad de bilinealidad y el hecho de que $\vec{w} \in U^\perp$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle &= \langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v}_1 \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v}_1 \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle \\
\langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle &= \langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle
\end{aligned}$$

y sustituimos los valores de los vectores

$$\begin{aligned}
\langle (1,-1,-1), (1,0,-1) \rangle &= \langle \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,1), (1,0,-1) \rangle \\
\langle (1,-1,-1), (1,0,-1) \rangle &= \alpha \langle (1,0,-1), (1,0,-1) \rangle + \beta \langle (0,1,1), (1,0,-1) \rangle \\
2 &= 2\alpha - \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle (1,-1,-1), (0,1,1) \rangle &= \langle \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,1), (0,1,1) \rangle \\
\langle (1,-1,-1), (0,1,1) \rangle &= \alpha \langle (1,0,-1), (0,1,1) \rangle + \beta \langle (0,1,1), (0,1,1) \rangle \\
-2 &= -\alpha + 2\beta
\end{aligned}$$

sistema cuya solución se puede obtener fácilmente

$$\left.\begin{array}{r} 2 = 2\alpha - \beta \\ -2 = -\alpha + 2\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4 = 4\alpha - 2\beta \\ -2 = -\alpha + 2\beta \end{array}\right\} \Rightarrow 2 = 3\alpha\} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \text{ y } \beta = 2\alpha - 2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

y con estos valores calculamos el valor de $\vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{2}{3}(1,0,-1) - \frac{2}{3}1(0,1,1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \pi_U(\vec{v}).$$

Para la simetría no es necesario calcular $\vec{w}$, puesto que en este caso

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \vec{v} - \vec{u} \Rightarrow s_U(\vec{v}) = \vec{u} - \vec{w} = \vec{u} - \underbrace{(\vec{v} - \vec{u})}_{w},$$

y por tanto

$$s_U(1,-1,-1) = 2\vec{u} - \vec{v} = 2\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) - (1,-1,-1) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right) - (1,-1,-1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

igual que se ha calculado antes.

2. Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:

   a) **(0.75 puntos)** ¿Existe una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, que cumpla $f(1,0,0) = (1,1)$, $f(0,1,0) = (2,-3)$, $f(0,0,1) = (-1,2)$ y $f(3,0,1) = (2,5)$? En caso afirmativo calcula la matriz asociada a las bases canónica $M_{C_3 \to C_2}(f)$, en caso contrario indica por qué no existe.

   b) **(0.75 puntos)** Demuestra, aplicando los teoremas sobre funciones continuas correspondientes, que la ecuación $1 - x^2 = \tan x$, tiene una solución en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Solución:

a) Si f fuera lineal y puesto que conocemos la imagen de la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,1) \\ f(0,1,0) &= (2,-3) \\ f(0,0,1) &= (-1,2) \end{aligned}$$

podemos obtener la imagen de cualquier vector, en particular, podemos obtener la imagen de $(3,0,1)$, ya que

$$(3,0,1) = 3(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

Si f es lineal

$$f(3,0,1) = 3f(1,0,0) + 0f(0,1,0) + 1f(0,0,1) = 3(1,1) + 0(2,-3) + 1(-1,2) = (3,3) + (-1,2) = (2,5)$$

que es el valor dado en el enunciado, luego sí existe esa aplicación lineal. La matriz $M_{C_3 \to C_2}(f)$ se obtiene con las imágenes de la base canónica

$$M_{C_3 \to C_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Consideremos la función

$$f(x) = 1 - x^2 - \tan x$$

que es claramente continua en el intervalo dado, ya que los puntos de discontinuidad de $\tan x$ están en $(2k+1)\frac{\pi}{2}$. Si evaluamos f en los extremos del intervalo

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{16} - 1(-1) = 2 - \frac{\pi^2}{16} = 1.3831 > 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{16} - 1 = -\frac{\pi^2}{16} < 0$$

luego aplicando el Teorema de Bolzano, la función f es continua y toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo, así que debe existir $\xi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, donde

$$f(\xi) = 0$$

3. Sea $f(x,y,z)$ el endomorfismo cuya expresión analítica está dada por la siguiente expresión

$$f(x,y,z) = (x + 2y + 3z, 2x + 4y + 6z, 3x + 6y + 9z)$$

   a) **(0.75 puntos)** Calcula la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
   Solución: Para encontrar la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ solo tenemos que calcular las imágenes de los vectores de dicha base mediante la aplicación f, estas imágenes serán las columnas de la matriz:

$$M_{C_3 \to C_3}(f) = (f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

b) (**1.0 puntos**) Calcula una base de los subespacios $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$. ¿Es f inyectiva?¿Es f suprayectiva? Razona las respuestas.

Solución: Usando la definición de núcleo de una aplicación lineal

$$\ker(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+2y+3z, 2x+4y+6z, 3x+6y+9z) = (0,0,0)\right\}$$

es decir

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 0 \\ 2x+4y+6z &= 0 \\ 3x+6y+9z &= 0 \end{aligned}$$

Está claro que la segunda y tercera ecuación se obtienen a partir de la primera multiplicando por 2 y 3, respectivamente, luego sólo hay una ecuación independiente

$$x+2y+3z=0$$

Como el subespacio $\ker f$ está definido mediante 1 ecuación y estamos en un espacio vectorial de dimensión 3, entonces necesitamos $3-1=2$ parámetros, elegimos y y z para definir esos parámetros

$$\begin{aligned} y &= \alpha \\ z &= \beta \end{aligned}$$

y utilizamos la ecuación para obtener la otra coordenada, x, en función de estos parámetros

$$x = -2y-3z = -2\alpha - 3\beta,$$

los vectores del núcleo son de la forma

$$(x,y,z) = (-2\alpha-3\beta, \alpha, \beta) = \alpha(-2,1,0) + \beta(-3,0,1)$$

y podemos poner

$$\ker f = \langle (-2,1,0); (-3,0,1) \rangle \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 2$$

y puesto que $\ker f$ es no nulo, la aplicación no es inyectiva.
Un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$ viene dado por las imágenes de una base de $\mathbb{R}^3$, por tanto

$$\mathrm{Im}\, f = \langle \{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\} \rangle = \langle \{(1,2,3), (2,4,6), (3,6,9)\} \rangle$$

Es fácil comprobar que el rango de los vectores es 1, puesto que las coordenas son proporcionales y una base de la imagen será

$$\mathrm{Im}\, f = \langle (1,2,3) \rangle$$

y por tanto

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

luego la aplicación no es sobreyectiva.
La ecuación de las dimensiones

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) \Leftrightarrow 2+1=3$$

se cumple trivialmente.

c) (**0.75 puntos**) Halla la matriz $M_{B_1 \to B_2}(f)$ de f respecto de las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1,0,1); (1,-1,0); (0,0,1)\} \\ \\ B_2 &= \{(1,1,1); (0,1,1); (0,1,0)\} \end{aligned}$$

Nos piden

$$M_{B_1 \to B_2}(f)$$

que podemos calcular usando la matriz de f respecto a la base canónica y las matrices de cambio de base como

$$M_{B_1\to B_2}(f) = M_{C_3\to B_2} M_{C_3\to C_3}(f)\, M_{B_1\to C_3}$$

o también

$$M_{B_1\to B_2}(f) = (M_{B_2\to C_3})^{-1} M_{C_3\to C_3}(f)\, M_{B_1\to C_3}$$

siendo

$$M_{B_1\to C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M_{B_2\to C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned} M_{B_1\to B_2}(f) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 3 & \alpha & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

a) **(1 puntos)** Estudia para qué valores del parámetro α, la matriz M es diagonalizable.

Solución: Calculamos el polinomio característico asociado a M, que dependerá de α

$$\phi_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 12 \\ 3 & \alpha-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\alpha-\lambda)(-4-\lambda)$$

y deducimos que los valores propios son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$ y $\lambda_3 = \alpha$.

Está claro que si $\alpha \notin \{2, -4\}$ entonces los tres valores son reales y distintos y por tanto M será diagonalizable.

Si $\alpha = 2$, la matriz es

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

y tendremos 2 valores propios: $\lambda_1 = 2$, con multiplicidad $m(\lambda_1) = 2$ y $\lambda_2 = -4$, con multiplicidad $m(\lambda_2) = 1$. Para comprobar si M es diagonalizable en este caso, solo es necesario encontrar el subespacio propio asociado al valor propio múltiple y comprobar si su dimensión es igual que la multiplicidad de dicho valor propio. Para el valor propio simple no es necesario puesto que está claro que debe ser 1 ya que siempre se cumple

$$1 \leq \dim(N_\lambda) \leq m(\lambda)$$

y si $m(\lambda) = 1$, se produce la igualdad. Comprobemos, entonces, si para λ_1

$$\dim(N_{\lambda_1}) = m(\lambda_1) = 2$$

el subespacio propio es el núcleo de la matriz

$$\begin{aligned}
M-\lambda_1 I &= M-2I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \\
\ker\left(M-\lambda_1 I\right) &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 12z \\ 3x+6z \\ -6z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
12z &= 0 \\
3x+6z &= 0 \\
-6z &= 0
\end{aligned}$$

por tanto

$$z=x=0$$

mientras que la y es libre, es decir los vectores son de la forma

$$(0,y,0)$$

y el subespacio propio asociado a λ_1 será

$$N_{\lambda_1}=\langle(0,1,0)\rangle$$

que tiene dimensión 1 y por tanto no coincide con su multiplicidad y deducimos que para este valor la matriz M no es diagonalizable.
Si $\alpha=-4$, la matriz es

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

y tendremos 2 valores propios: $\lambda_1=2$, con multiplicidad $m\left(\lambda_1\right)=1$ y $\lambda_2=-4$, con multiplicidad $m\left(\lambda_2\right)=2$. Como antes, para comprobar si M es diagonalizable en este caso, solo es necesario encontrar el subespacio propio asociado al valor propio múltiple y comprobar si su dimensión es igual que la multiplicidad de dicho valor propio. Comprobemos, entonces, si para λ_2

$$\dim\left(N_{\lambda_2}\right)=m\left(\lambda_2\right)=2$$

el subespacio propio es el núcleo de la matriz

$$\begin{aligned}
M-\lambda_2 I &= M+4I=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\ker\left(M-\lambda_2 I\right) &\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 6x+12z \\ 3x+6z \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
6x+12z &= 0 \\
3x+6z &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

La primera ecuación es dependiente de la segunda, se obtiene al multiplicar esta última por 2, por tanto podemos prescindir de ella y tendremos

$$3x+6z=0\Rightarrow x=-2z$$

mientras que la y es libre, es decir los vectores son de la forma

$$(-2z, y, z) = z\,(-2, 0, 1) + y\,(0, 1, 0)$$

y el subespacio propio asociado a λ_2 será

$$N_{\lambda 2} = \langle (-2, 0, 1)\,; (0, 1, 0) \rangle$$

que tiene dimensión 2 y por tanto coincide con la multiplicidad de λ_2 y deducimos que para este valor la matriz M es diagonalizable.

Como resumen

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 3 & \alpha & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ es diagonalizable para } \alpha \neq 2.$$

$b)$ **(1.5 puntos)** Para $\alpha = 1$, encuentra una matriz diagonal semejante a M y las matrices de paso correspondientes.

Para $a = 2$ y $b = 3$ demuestra que la matriz A es diagonalizable, hallando una matriz diagonal y una matriz de paso.

Este apartado es el caso particular en el que $\alpha = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

y por tanto como $\alpha \neq 2$, podemos decir que es diagonalizable, además según hemos visto en el apartado anterior los valores propios son

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4 \text{ y } \lambda_3 = 1$$

Una matriz diagonal semejante puede ser

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la matriz de paso necesitaremos una base de vectores propios y para ello necesitaremos los subespacios propios asociados a cada uno de los vectores propios. Para Para $\lambda_1 = 2$

$$N_{\lambda_1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 0 & 12 \\ 3 & 1-\lambda_1 & 6 \\ 0 & 0 & -4-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{aligned} 12z &= 0 \\ 3x - y + 6z &= 0 \\ -6z &= 0 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ y &= 3x \end{aligned}$$

luego

$$N_{\lambda_1} = (x, 3x, 0) = x\,(1, 3, 0)$$

Para $\lambda_2 = -4$

$$N_{\lambda_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 0 & 12 \\ 3 & 1-\lambda_2 & 6 \\ 0 & 0 & -4-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 12 \\ 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{aligned} 6x + 12z &= 0 \\ 3x + 5y + 6z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} x &= -2z \\ y &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$N_{\lambda_2} = (-2z, 0, z) = z\,(-2, 0, 1)$$

Para $\lambda_3 = 1$

$$N_{\lambda_3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda_3 & 0 & 12 \\ 3 & 1-\lambda_3 & 6 \\ 0 & 0 & -4-\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{aligned} x + 12z &= 0 \\ 3x + 6z &= 0 \\ -5z &= 0 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} x &= z = 0 \\ y &= y \end{aligned}$$

luego

$$N_{\lambda_3} = (0, y, 0) = y\,(0, 1, 0)$$

La matriz de paso sería

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Y se comprueba que

$$P^{-1}DP = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = M$$

5. (**1.5 puntos**) Calcula el desarrollo de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ en el punto $x_0 = 0$ y utiliza este desarrollo para aproximar el valor de $\sqrt[3]{1{,}1}$, obteniendo la menor cota posible del error cometido.

Solución: Tendremos que derivar hasta el grado 3 para obtener el polinomio y hasta el grado 4 para obtener el error

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$(1+x)^{\frac{1}{3}}$	1	$\dfrac{1}{0!}=1$
1	$\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\frac{1}{3}}{1!}=\frac{1}{3}$
2	$-\frac{2}{9}(1+x)^{\frac{-5}{3}}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{-\frac{2}{9}}{2!}=-\frac{1}{9}$
3	$\frac{10}{27}(1+x)^{\frac{-8}{3}}$	$\frac{10}{27}$	$\dfrac{\frac{10}{27}}{3!}=\frac{5}{81}$
4	$-\frac{80}{81}(1+x)^{\frac{-8}{3}}$	$-\frac{80}{81}(1+\xi)^{\frac{-8}{3}}$	$-\frac{80}{81}\frac{1}{4!}(1+\xi)^{\frac{-8}{3}}=-\frac{10}{243}(1+\xi)^{\frac{-8}{3}}$

luego

$$P_3 f(x;0)=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3$$

Para calcular usando el polinomio, hay que tener en cuenta que

$$\sqrt[3]{1{,}1}=\sqrt[3]{1+0{,}1}$$

luego

$$x=0{,}1$$

y tendremos

$$P_3 f(0{,}1;0)=1+\frac{1}{3}(0{,}1)-\frac{1}{9}(0{,}1)^2+\frac{5}{81}(0{,}1)^3=1.032\,3$$

El error cometido usando el resto de Lagrange es

$$|R_4 f(0{,}1,0)|=\left|-\frac{10}{243}(1+\xi)^{\frac{-8}{3}}(0{,}1)^4\right|=(1+\xi)^{\frac{-8}{3}}\left(-4.115\,2\times 10^{-6}\right)=\frac{1}{(1+\xi)^{8/3}}\left(-4.115\,2\times 10^{-6}\right)$$

pero la función $\frac{1}{(1+\xi)^{8/3}}$ tiene un máximo en $\xi=0$, dentro del intervalo $[x_0,x]=[0,0{,}1]$, luego

$$|R_4 f(0{,}1,0)|<\left(-4.115\,2\times 10^{-6}\right)$$