Matemáticas I - Grado en Ingeniería Química Industrial
17 de enero de 2018
Examen Parcial Q1 - Soluciones

industriales
etsii UPCT

Apellidos y Nombre:
DNI:

Observaciones:

- No está permitido el uso de calculadora programable. Los cálculos deben ser **exactos** y los ángulos expresados en **radianes**.
- **Justifica los razonamientos empleados. Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado serán considerados erróneos.**
- Entrega la hoja del enunciado.
- El examen está puntuado sobre 10 puntos. La puntuación obtenida en este ejercicio supone el 35 % de la nota final de la asignatura en las condiciones indicadas en la guía docente.
- Duración del ejercicio: 3 horas.

1. Se considera en $\mathbb{R}^4$, junto con el producto escalar euclídeo, el siguiente subespacio vectorial

$$U =< (2,0,-1,0),(0,-4,0,1),(2,-4,-6,1) >$$

a) (**1 punto**) Obtén mediante el método de Gram-Schmidt una base ortonormal para U.

b) (**0.5 puntos**) Obtén una base ortonormal para $U^{\perp}$.

c) (**1 punto**) Calcula la simetría ortogonal de base U para el vector $v = (1,2,3,4)$.

Solución:

a) Definimos

$$u_1 = (2,0,-1,0) \qquad u_2 = (0,-4,0,1) \qquad u_3 = (2,-4,-6,1)$$

Usamos Gram-Schmidt para construir la base ortogonal. El primer vector de la base ortogonal es el mismo que para la base inicial

$$v_1 = u_1 = (2,0,-1,0)$$

Los siguientes vectores se construyen usando el vector equivalente de la base original y una combinación lineal de los vectores anteriores

$$v_2 = u_2 + \alpha v_1 = (0,-4,0,1) + \alpha(2,0,-1,0) = (2\alpha,-4,-\alpha,1)$$

y elegimos el parámetro de forma que el vector resultante sea ortogonal con los anteriores

$$\langle v_2, v_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (2\alpha,-4,-\alpha,1), (2,0,-1,0)\rangle = 4\alpha + \alpha = 0 \Leftrightarrow 5\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Este resultado indica que los dos primeros vectores de la base u_1 y u_2 ya eran ortogonales y podíamos habernos ahorrado el paso poniendo directamente $v_2 = u_2$.

Repetimos el proceso para el último vector de la base ortogonal usando el vector equivalente de la base original y una combinación lineal de los vectores que hemos obtenido en los pasos anteriores

$$v_3 = u_3+\alpha v_1+\beta v_2 = (2,-4,-6,1)+\alpha(2,0,-1,0)+\beta(0,-4,0,1) = (2+2\alpha,-4-4\beta,-6-\alpha,1+\beta)$$

y elegimos los parámetros α y β de forma que v_3 sea ortogonal con v_1 y v_2

$$\langle v_3, v_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (2+2\alpha,-4-4\beta,-6-\alpha,1+\beta), (2,0,-1,0)\rangle = 10+5\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$$

$$\langle v_3, v_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (2+2\alpha,-4-4\beta,-6-\alpha,1+\beta), (0,-4,0,1)\rangle = 17+17\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -1$$

de modo que

$$v_3 = (-2,0,-4,0).$$

Para conseguir la base ortonormal dividiremos cada vector por su norma

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(2,0,-1,0)}{\sqrt{\langle (2,0,-1,0),(2,0,-1,0)\rangle}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,-\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)\\
w_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(0,-4,0,1)}{\sqrt{\langle (0,-4,0,1),(0,-4,0,1)\rangle}} = \left(0,-\frac{4}{\sqrt{17}},0,\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\\
w_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{(-2,0,-4,0)}{\sqrt{\langle (-2,0,-4,0),(-2,0,-4,0)\rangle}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}},0\right)
\end{aligned}$$

b) Por las propiedades de $U^{\perp}$ tendremos

$$\dim\left(U^{\perp}\right) = \dim\left(\mathbb{R}^4\right) - \dim(U) = 1$$

Luego necesitamos un único vector para construir $U^{\perp}$ que será de la forma $u_4 = (a,b,c,d)$. Este vector debe ser ortonormal a los elementos de la base de U, luego

$$\begin{aligned}
\langle u_4, v_1\rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle (a,b,c,d), (2,0,-1,0)\rangle = 2a-c = 0\\
\langle u_4, v_2\rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle (a,b,c,d), (0,-4,0,1)\rangle = -4b+d = 0\\
\langle u_4, u_3\rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle (a,b,c,d), (-2,0,-4,0)\rangle = -2a-4c = 0
\end{aligned}$$

De la primera ecuación $c = 2a$ y de la segunda $d = 4b$ y sustituyendo en la tercera

$$-2a-4c = 0 \Leftrightarrow -c-4c = 0 \Leftrightarrow -5c = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

luego $a = 0$ y sólo nos queda la relación entre d y b y el vector es de la forma

$$u_4 = (0,b,0,4b) = b\,(0,1,0,4)$$

luego

$$U^{\perp} = \langle (0,1,0,4)\rangle$$

que al ser único ya es una base ortogonal. La base ortonormal se hace como antes dividiendo por el módulo del vector

$$w_4 = \frac{u_4}{\|u_4\|} = \frac{(0,1,0,4)}{\sqrt{\langle (0,1,0,4),(0,1,0,4)\rangle}} = \left(0,\frac{1}{\sqrt{17}},0,\frac{4}{\sqrt{17}}\right).$$

NOTA*: Aunque hemos utilizado la base ortogonal de U para obtener la base de $U^{\perp}$, es posible utilizar la base original formada por u_1, u_2 y u_3,*

$$\begin{aligned}
\langle u_4, u_1\rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle (a,b,c,d), (2,0,-1,0)\rangle = 2a-c = 0\\
\langle u_4, u_2\rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle (a,b,c,d), (0,-4,0,1)\rangle = -4b+d = 0\\
\langle u_4, v_3\rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle (a,b,c,d), (2,-4,-6,1)\rangle = 2a-4b-6c+d = 0
\end{aligned}$$

De la primera ecuación $c = 2a$ y de la segunda $d = 4b$ y sustituyendo en la tercera

$$2a - 4b - 6c + d = 0 \Leftrightarrow c - d - 6c + d = 0 \Leftrightarrow -5c = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

y nos da el mismo vector que antes

$$u_4 = (0, b, 0, 4b) = b\,(0, 1, 0, 4)$$

c) Si $v \in \mathbb{R}^4$, entonces podemos poner

$$v = u + w, \;\; u \in U, w \in U^{\perp}$$

y nos están pidiendo la simetría ortogonal de base U, es decir, nos piden

$$s(v) = u - w.$$

Sabemos que u es la proyección ortogonal de v sobre U, mientras que w será la proyección ortogonal de v sobre $U^{\perp}$. Como $\dim\left(U^{\perp}\right) = 1$ y hemos encontrado una base en el apartado anterior necesitaremos hacer menos operaciones si calculamos w.
Por una parte

$$w \in U^{\perp} \Rightarrow w = \alpha\,(0, 1, 0, 4)\,, \alpha \in \mathbb{R}$$

Vamos a calcular α

$$\langle v, u_4 \rangle = \langle u + w, u_4 \rangle$$

usando la propiedad de bilinealidad de $\langle \cdot \rangle$

$$\langle u + w, u_4 \rangle = \langle u, u_4 \rangle + \langle w, u_4 \rangle$$

y utilizando que $u \perp u_4$, puesto que $u \in U$ y $u_4 \in U^{\perp}$

$$\langle u + w, u_4 \rangle = 0 + \langle w, u_4 \rangle = \langle w, u_4 \rangle$$

es decir

$$\langle v, u_4 \rangle = \langle w, u_4 \rangle$$

y sustituyendo los vectores

$$\begin{aligned} \langle (1,2,3,4)\,, (0,1,0,4) \rangle &= \langle \alpha\,(0,1,0,4)\,, (0,1,0,4) \rangle = \alpha\,\langle (0,1,0,4)\,, (0,1,0,4) \rangle \\ 18 &= \alpha 17 \\ \alpha &= \frac{18}{17} \end{aligned}$$

Y calculamos w

$$w = \alpha\,(0,1,0,4) = \frac{18}{17}\,(0,1,0,4) = \left(0, \frac{18}{17}, 0, \frac{72}{17}\right)$$

con este valor podemos calcular u, la proyección ortogonal de v sobre U

$$u = v - w$$

aunque no es necesario calcular su valor para obtener $s\,(v)$ puesto que

$$s\,(v) = u - w = \underbrace{(v - w)}_{u} - w = v - 2w$$

y por tanto

$$s\,((1,2,3,4)) = (1,2,3,4) - 2\left(0, \frac{18}{17}, 0, \frac{72}{17}\right) = \left(1, 2 - \frac{36}{17}, 3, 4 - \frac{144}{17}\right) = \left(1, -\frac{2}{17}, 3, -\frac{76}{17}\right)$$

NOTA: *Este apartado también se podría resolver sin conocer la base de $U^{\perp}$ ya que podemos calcular directamente la proyección ortogonal sobre U, es decir, el vector u. Para ello tenemos en cuenta que $u \in U$ y por tanto*

$$u = \alpha(2,0,-1,0) + \beta(0,-4,0,1) + \gamma\,(2,-4,-6,1) = (2\alpha + 2\gamma, -4\beta - 4\gamma, -\alpha - 6\gamma.\beta + \gamma)$$

y calcularemos el valor del producto escalar v por cada elemento de la base. Usando la propiedad de bilinealidad y el hecho de que $w \in U^{\perp}$

$$\begin{aligned}
\langle v, u_1\rangle &= \langle u + w, u_1\rangle = \langle u, u_1\rangle + \langle w, u_1\rangle = \langle u, u_1\rangle \\
\langle v, u_2\rangle &= \langle u + w, u_2\rangle = \langle u, u_2\rangle + \langle w, u_2\rangle = \langle u, u_2\rangle \\
\langle v, u_3\rangle &= \langle u + w, u_3\rangle = \langle u, u_3\rangle + \langle w, u_3\rangle = \langle u, u_3\rangle
\end{aligned}$$

y sustituimos los valores de los vectores

$$\begin{aligned}
\langle (1,2,3,4), (2,0,-1,0)\rangle &= \langle (2\alpha + 2\gamma, -4\beta - 4\gamma, -\alpha - 6\gamma, \beta + \gamma), (2,0,-1,0)\rangle \Leftrightarrow -1 = 5\alpha + 10\gamma \\
\langle (1,2,3,4), (0,-4,0,1)\rangle &= \langle (2\alpha + 2\gamma, -4\beta - 4\gamma, -\alpha - 6\gamma, \beta + \gamma), (0,-4,0,1)\rangle \Leftrightarrow -4 = 17\beta + 17\gamma \\
\langle (1,2,3,4), (2,-4,-6,1)\rangle &= \langle (2\alpha + 2\gamma, -4\beta - 4\gamma, -\alpha - 6\gamma, \beta + \gamma), (2,-4,-6,1)\rangle \Leftrightarrow -20 = 10\alpha + 17\beta + 57\gamma
\end{aligned}$$

sistema cuya solución se puede obtener fácilmente

$$\left.\begin{array}{c} 5\alpha + 10\gamma = -1 \\ \\ 17\beta + 17\gamma = -4 \\ \\ 10\alpha + 17\beta + 57\gamma = -20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha = -\frac{1}{5} - 2\gamma \\ \\ \beta = -\frac{4}{17} - \gamma \\ \\ 10\left(-\frac{1}{5} - 2\gamma\right) + 17\left(-\frac{4}{17} - \gamma\right) + 57\gamma = -20 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} \alpha = -\frac{1}{5} - 2\gamma \\ \\ \beta = -\frac{4}{17} - \gamma \\ \\ 20\gamma = -14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha = -\frac{1}{5} - 2\gamma \\ \\ \beta = -\frac{4}{17} - \gamma \\ \\ \gamma = -\frac{14}{20} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \alpha = -\frac{1}{5} - 2\left(-\frac{14}{20}\right) = \frac{6}{5} \\ \\ \beta = -\frac{4}{17} - \left(-\frac{14}{20}\right) = \frac{79}{170} \\ \\ \gamma = -\frac{14}{20} \end{array}\right\},$$

y con estos valores calculamos el valor de u

$$u = (2\alpha + 2\gamma, -4\beta - 4\gamma, -\alpha - 6\gamma.\beta + \gamma) = \left(1, \frac{16}{17}, 3, -\frac{4}{17}\right).$$

De nuevo no es necesario calcular w, puesto que en este caso

$$v = u + w \Rightarrow w = v - u \Rightarrow s\,(v) = u - w = u - \underbrace{(v - u)}_{w},$$

y por tanto

$$s\,((1,2,3,4)) = 2u - v = 2\left(1, \frac{16}{17}, 3, -\frac{4}{17}\right) - (1,2,3,4) = \left(1, -\frac{2}{17}, 3, -\frac{76}{17}\right),$$

igual que se ha calculado antes.

2. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la base B siguiente

$$B = \{u_1 = (-1,1,0), u_2 = (-1,2,0), u_3 = (0,1,1)\}$$

y el endomorfismo f tal que

$$M_{B\to B}(f) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

siendo $a \in \mathbb{R}$ tal que $f\,(u_1 + u_2) = f\,(u_3)$.

a) (**0.25 puntos**) Justifica de forma razonada que $a = -1$.

b) (**1.25 puntos**) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica C de $\mathbb{R}^3$,así como su expresión analítica.

c) (**1 punto**) Calcula $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$. ¿Es f inyectiva?¿Es f suprayectiva? Razona las respuestas.

Solución:

a) Como f es un endomorfismo, es decir, una aplicación lineal, tendremos

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$$

Como la matriz dada es la matriz de f asociada a la base B, eso quiere decir que las columnas de M son precisamente las imágenes de los vectores de la base mediante la aplicación f es decir

$$\begin{array}{rcl} f(u_1) & = & (a, 1, 1,) \\ f(u_2) & = & (2, -1, -2) \\ f(u_3) & = & (1, 0, -1) \end{array}$$

por tanto si $f(u_1 + u_2) = f(u_3)$, entonces

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = f(u_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$a + 2 = 1 \Leftrightarrow a = -1$$

b) Nos piden $M_{C\to C}(f)$ que podemos calcular como

$$M_{C\to C}(f) = M_{B\to C} M_{B\to B}(f) M_{C\to B}$$

donde $M_{B\to C}$ y $M_{C\to B}$ son las matrices de cambio de base, es decir, $M_{C\to B} = M_{B\to C}^{-1}$ y donde además

$$M_{B\to C} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El cálculo de la inversa La inversa es

$$M_{B\to C}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en la ecuación

$$\begin{array}{rcl} M_{C\to C}(f) & = & M_{B\to C} M_{B\to B}(f) M_{C\to B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -6 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Mientras que la expresión analítica se obtiene multiplicando la matriz por un vector genérico (x, y, z)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -6 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - x \\ 4z - 4y - 6x \\ 2z - 3y - 4x \end{pmatrix}$$

c) Para el cálculo del Núcleo y de la imagen, no es necesario recurrir a la matriz obtenida en el apartado anterior podemos plantear las ecuaciones directamente con la matriz inicial

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x+2y+z=0 \\ x-y=0 \\ x-2y-z=0 \end{pmatrix}$$

De la segunda ecuación obtenemos $y = x$, mientras que la tercera es la primera multiplicada por -1, luego

$$-x+2y+z=0 \Leftrightarrow -x+2x+z=0 \Leftrightarrow x+z=0 \Leftrightarrow z=-x$$

es decir, los vectores de $\ker f$ son de la forma

$$(x, x, -x) = x\,(1, 1, -1)$$

Hay que tener cuidado porque este vector está expresado en la base B, podemos expresarlo en la base canónica$u_1 =, u_2 = (-1, 2, 0), u_3 = (0, 1, 1)$

$$x\,(1, 1, -1)_B = x\,(1 \cdot (-1, 1, 0) + 1 \cdot (-1, 2, 0) - 1 \cdot (0, 1, 1))_C = x\,(-2, 2, -1)$$

luego

$$\ker f = \langle (-2, 2, -1)_C \rangle = \langle (1, 1, -1)_B \rangle$$

lo que vemos es que no es únicamente el vector nulo y por tanto f no es inyectiva.
Para el cálculo de la imagen usamos la matriz original, teniendo en cuenta que los resultados se obtendrán expresados en base B

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y+z \\ x-y \\ x-2y-z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\operatorname{Im} f = \langle (-1, 1, 1)_B, (2, -1, -2)_B, (1, 0, -1)_B \rangle$$

y teniendo en cuenta que el último es combinación lineal (suma) de los dos anteriores

$$\operatorname{Im} f = \langle (-1, 1, 1)_B, (2, -1, -2)_B \rangle$$

o si usamos la base canónica

$$\begin{aligned} (-1, 1, 1)_B &= -1 \cdot (-1, 1, 0) + 1 \cdot (-1, 2, 0) + 1 \cdot (0, 1, 1) = (0, 2, 1)_C \\ (2, -1, -2)_B &= 2 \cdot (-1, 1, 0) - 1 \cdot (-1, 2, 0) - 2 \cdot (0, 1, 1) = (-1, -2, -2)_C \end{aligned}$$

3. Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Resuelve los siguientes apartados:

a) **(1 punto)** Estudia para qué valores del parámetro a, la matriz M es diagonalizable.

b) **(1.5 punto)** Para $a = 1$, calcula la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada. Calcula de forma explícita la matriz M^4.

Solución:

a) Calculamos el polinomio característico de M

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(a-\lambda)$$

luego los valores propios son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= -2 \\ \lambda_3 &= a \end{aligned}$$

Está claro que si $\lambda_3 \notin \{2,-2\}$, entonces los 3 valores propios de M son distintos y reales y por tanto M será diagonalizable.

Veamos ahora qué ocurre con los valores si $\lambda_3 = 2$ o si $\lambda_3 = -2$, ya que en este caso tendríamos un valor propio doble. Para $\lambda_3 = 2$ calcularemos el subespacio propio asociado

$$\begin{aligned} N_{\lambda_3} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2z \\ -4y+z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x,0,0) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \langle (1,0,0) \rangle \end{aligned}$$

$$\dim (N_{\lambda_3}) = 1 < m(\lambda_3) = 2$$

y la matriz no será diagonalizable.

Repetimos el proceso para $\lambda_3 = -2$ y calcularemos el subespacio propio asociado

$$\begin{aligned} N_{\lambda_3} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 4x+2z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (0,y,0) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \langle (0,1,0) \rangle \end{aligned}$$

y como antes

$$\dim (N_{\lambda_3}) = 1 < m(\lambda_3) = 2$$

y la matriz tampoco sería diagonalizable en este caso.

b) Como $\alpha = 1 \notin \{2,-2\}$, entonces sí que será diagonalizable ya que los valores propios serán $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 1$, que son 3 valores reales distintos. Vamos a calcular el subespacio propio para cada valor propio

$$\begin{aligned}
N_{\lambda_1} &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2z=0 \\ 4y+z=0 \\ -z=0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x,0,0)\in\mathbb{R}^3\right\} = \langle(1,0,0)\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\lambda_2} &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -4x+2z=0 \\ 0=0 \\ 3z=0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(0,y,0)\in\mathbb{R}^3\right\} = \langle(0,1,0)\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\lambda_3} &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x+2z=0 \\ -3y+z=0 \\ 0=0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{\left(-2z,\frac{z}{3},z\right)\in\mathbb{R}^3\right\} = \left\langle\left(-2,\frac{1}{3},1\right)\right\rangle = \langle(-6,1,3)\rangle
\end{aligned}$$

y podemos poner como matriz diagonal semejante a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mientras que la matriz de paso sería

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

podemos comprobar que

$$M = P^{-1}DP$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
M^4 &= P^{-1}D^4P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 16 & 0 & 30 \\ 0 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4. Responde a las siguientes cuestiones:

   a) (**0.25 puntos**) Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal y supongamos que $\lambda = 0$ es un autovalor de f. ¿Es f inyectiva ? ¿Por qué?

   b) (**0.5 puntos**) ¿Puede una matriz invertible A tener un valor propio nulo? Razona la respuesta.

   c) (**0.25 puntos**) La fórmula de las dimensiones nos dice que dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, entonces se cumple

   $$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4)$$

   ¿Se podría decir entonces que $\mathbb{R}^4$ es suma directa de estos dos subespacios vectoriales? Razona la respuesta.

Solución:

a) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de f, eso implica que existen vectores $v \in V$, no nulos, es decir $v \neq 0$ tal que

$$f(v) = 0 \cdot v = 0$$

es decir $v \in \ker f$ y por tanto $\ker f \neq 0$ y la aplicación no puede ser inyectiva.

b) Si A es invertible, entonces existe A^{-1} de forma que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Si 0 es un autovalor entonces existen vectores $v \in V$, con $v \neq 0$, tal que

$$Av = 0$$

como existe la matriz A^{-1}, entonces podemos poner

$$A^{-1}Av = A^{-1}0 = 0$$

y por tanto

$$Iv = 0 \Rightarrow v = 0$$

pero esto contradice la hipótesis inicial.

Otra forma de verlo es la siguiente: Que λ_k es un valor propio implica que

$$\det(A - \lambda_k I) = 0$$

tomando $\lambda_k = 0$ entonces

$$\det(A) = 0$$

y por tanto A no es invertible.

c) Imposible ya que $\ker f \in \mathbb{R}^4$, mientras que $\operatorname{Im}(f) \in \mathbb{R}^3$, luego es imposible plantearse una definición de suma de vectores adecuada.

5. (**1.5 puntos**) Encuentra mediante el método SIMPLEX la solución óptima y el valor óptimo del siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x,y,z) = 4x + 3y + z \\ \text{Sujeto a} & 5x + 6y + 3z \leq 25 \\ & 5x + 3y + 4z \leq 20 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

Soluión: Pasamos a forma estándar

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -4x - 3y - z \\ \text{Sujeto a} & 5x + 6y + 3z + x_4^h = 25 \\ & 5x + 3y + 4z + x_5^h = 20 \\ & x, y, z, x_4^h, x_5^h \geq 0 \end{array}$$

Construímos la primera tabla y en cada paso elegimos un coeficiente de coste relativo (última cifra) como variable de entrada y elegimos el menor cociente entre el término independiente y los elementos de la columna de la variable de entrada que sean positivos (salvo el último), pivotando (intercambiando las dos variables).

	x	y	z	x_4^h	x_5^h	b
x_4^h	5	6	3	1	0	25
x_5^h	$\boxed{5}$	3	4	0	1	20
	-4	-3	-1	0	0	0

	x	y	z	x_4^h	x_5^h	b
x_4^h	0	$\boxed{3}$	-1	1	-1	5
z	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	4
	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{11}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	16

	x	y	z	x_4^h	x_5^h	b
y	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
x	1	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	3
	0	0	2	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	17

Solución: $x^* = \left(3, \frac{5}{3}, 0\right)$ y $f(x^*) = -17$.