1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:
$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{e^x}.$$

   a) (**1 punto**) Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x)$ en el punto $x_0 = 0$.

   b) (**0.6 puntos**) Usando el desarrollo obtenido en el apartado anterior, da una aproximación del valor de $f(0{,}1)$ y obtén una cota superior del error cometido en dicha aproximación, usando para ello el resto de Lagrange.

   c) (**0.8 puntos**) Calcula el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor del eje X la región bajo la curva $f(x)$, de 0 a π.

Solución:

a) Recordemos que el polinomio de Taylor de $f(x)$ en x_0 de orden n viene dado por:
$$T_n(f; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \frac{f^n(0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Para $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{e^x}$ con $n = 2$ y $x_0 = 0$, calculamos las sucesivas derivadas hasta el orden 2
$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x} \operatorname{sen} x, \\
f'(x) &= -e^{-x} \operatorname{sen} x + e^{-x} \cos x = e^{-x}(\cos x - \operatorname{sen} x), \\
f''(x) &= -e^{-x}(\cos x - \operatorname{sen} x) + e^{-x}(-\operatorname{sen} x - \cos x) = -2e^{-x} \cos x,
\end{aligned}$$
y evaluamos en el punto $x_0 = 0$
$$\begin{aligned}
f(0) &= e^{-0} \operatorname{sen} 0 = 0, \\
f'(0) &= e^{-0}(\cos 0 - \operatorname{sen} 0) = 1(1 - 0) = 1, \\
f''(0) &= -2e^{-0} \cos 0 = -2 \cdot 1 \cdot 1 = -2.
\end{aligned}$$

La siguiente tabla resume todos los cálculos

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
0	$e^{-x}\operatorname{sen} x$	0	$\frac{0}{0!}=0$
1	$e^{-x}(\cos x-\operatorname{sen} x)$	1	$\frac{1}{1!}=1$
2	$-2e^{-x}\cos x$	-2	$\frac{-2}{2!}=-1$

.

que nos permite construir el polinomio de Taylor pedido

$$\begin{aligned} T_2(f(x);x_0) &= f(x_0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &= 0+1(x-0)-1(x-0)^2 \\ &= x-x^2. \end{aligned}$$

b) Usando la expresión del polinomio de Taylor obtenida en el apartado anterior $T_2(f(x);0)=x-x^2$, obtendremos el valor aproximado de $f(0{,}1)$

$$T_2(f(x);0{,}1)=0{,}1-(0{,}1)^2=0{,}1-0{,}01=0{,}09.$$

Vamos a ver la cota de error que se obtiene usando el resto de Lagrange. La fórmula del resto es

$$R_n(f(x);x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

donde θ es un valor real entre x_0 y x. Para $f(x)$, $n=2$ y $x_0=0$, la expresión del resto de Lagrange será

$$R_2(f(x),0)=\frac{f'''(\theta)}{3!}x^3,$$

calculamos la tercera derivada

$$f'''(x)=2e^{-x}\cos x+2e^{-x}\operatorname{sen} x=2e^{-x}(\cos x+\operatorname{sen} x),$$

y la expresión del resto en este caso es

$$R_2f(x,0)=\frac{2e^{-\theta}(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{3!}x^3,$$

y tomando $x=0{,}1=\frac{1}{10}$

$$R_2f(0{,}1,0)=\frac{2e^{-\theta}(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{3!}\left(\frac{1}{10}\right)^3=\frac{e^{-\theta}(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{3000}.$$

Para encontrar una cota superior en el intervalo $\theta\in[0,0{,}1]$

$$|R_2f(0{,}1,0)|=\left|\frac{e^{-\theta}(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{3000}\right|=\frac{e^{-\theta}|\cos\theta+\operatorname{sen}\theta|}{3000}\le\frac{e^{-\theta}(|\cos\theta|+|\operatorname{sen}\theta|)}{3000}$$

donde hemos usado que $e^{-\theta} > 0$ y la desigualdad triangular. Como las funciones $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ están acotadas por 1, podemos poner

$$\frac{e^{-\theta}\left(|\cos\theta| + |\operatorname{sen}\theta|\right)}{3000} \leq \frac{e^{-\theta}}{3000}(1+1) = \frac{e^{-\theta}}{1500}.$$

Finalmente como $e^{-\theta}$ es decreciente, el máximo se alcanza en el extremo inferior del intervalo $[0, 0{,}1]$

$$\frac{e^{-\theta}}{1500} \leq \frac{1}{1500},$$

y así obtenemos la cota buscada

$$|R_2 f\,(0{,}1, 0)| \leq \frac{1}{1500} = 6{,}66 \times 10^{-4}.$$

NOTA: Vamos a comparar esta cota con el error aproximado que estamos cometiendo. Para ello evaluamos la función en el punto $x = 0{,}1$

$$f\,(0{,}1) = e^{-0{,}1}\,(\operatorname{sen} 0{,}1) \simeq 0{,}090333$$

y el error aproximado sería

$$|f\,(0{,}1) - T_2\,(f\,(x)\,; 0{,}1)| \simeq |0{,}090333 - 0{,}09| = 3{,}33 \times 10^{-4}.$$

Comprobamos efectivamente que

$$|f\,(0{,}1) - T_2\,(f\,(x)\,; 0{,}1)| = |R_2 f\,(0{,}1, 0)| < 3{,}33 \times 10^{-4},$$

que es menor que la cota de error máxima, de hecho es aproximadamente la mitad de esa cota.

c) El volumen del sólido de revolución se obtiene aplicando la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b f^2\,(x)\,dx,$$

y para este caso

$$V = \pi \int_0^\pi \left(e^{-x}\operatorname{sen} x\right)^2 dx = \pi \int_0^\pi e^{-2x}\operatorname{sen}^2(x)\,dx.$$

Para calcular la integral definida haremos uso de la fórmula trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$$

es decir

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^\pi e^{-2x}\operatorname{sen}^2(x)\,dx \\
&= \pi \int_0^\pi e^{-2x}\frac{1 - \cos(2x)}{2}dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^\pi e^{-2x}dx - \int_0^\pi e^{-2x}\cos(2x)\,dx\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(I_1 - I_2\right),
\end{aligned}$$

y calculamos cada integral por separado. I_1 que es una integral inmediata:

$$I_1 = \int_0^\pi e^{-2x} dx = -\frac{e^{-2x}}{2}\bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\pi}\right),$$

mientras que para calcular I_2 utilizamos integración por partes:

$$I_2 = \int_0^\pi e^{-2x} \cos(2x)\, dx$$

tomando

$$\begin{aligned} u &= \cos(2x) \Longrightarrow du = -2\,\mathrm{sen}\,(2x)\, dx \\ dv &= e^{-2x} dx \Longrightarrow v = -\frac{e^{-2x}}{2} \end{aligned}$$

hacemos el cambio

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\pi e^{-2x} \cos(2x)\, dx = -\frac{e^{-2x}}{2} \cos(2x)\bigg|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,(2x)\, dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2\pi}}{2}\right) - \int_0^\pi e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,(2x)\, dx \end{aligned}$$

y volvemos a utilizar partes en la integral, con el mismo esquema

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{sen}\,(2x) \Longrightarrow du = 2\cos(2x)\, dx \\ dv &= e^{-2x} dx \Longrightarrow v = -\frac{e^{-2x}}{2} \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2\pi}}{2}\right) - \left(-\frac{e^{-2x}}{2}\,\mathrm{sen}\,(2x)\bigg|_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi e^{-2x} \cos(2x)\, dx\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2\pi}}{2}\right) - I_2 \end{aligned}$$

despejando I_2

$$2I_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2\pi}}{2}\right),$$

por tanto

$$I_2 = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2\pi}\right)$$

y el volumen será

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{2}\left(I_1 - I_2\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\pi}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2\pi}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{8}\left(1 - e^{-2\pi}\right) \end{aligned}$$

NOTA: También es posible calcular la integral sin el cambio trigonométrico, usando integración por partes directamente

$$V = \pi \int_0^\pi e^{-2x} \operatorname{sen}^2(x)\, dx = \pi I$$

tomando

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen}^2(x) \Longrightarrow du = 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)\, dx \\ dv &= e^{-2x} dx \Longrightarrow v = -\frac{e^{-2x}}{2} \end{aligned}$$

integramos en I

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi e^{-2x} \operatorname{sen}^2(x)\, dx \\ &= -\frac{e^{-2x}}{2} \operatorname{sen}^2(x) \bigg|_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi e^{-2x} \operatorname{sen}(x) \cos(x)\, dx \\ &= 0 + \int_0^\pi e^{-2x} \operatorname{sen}(x) \cos(x)\, dx \end{aligned}$$

y volviendo usar integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen}(x) \cos(x) \Longrightarrow du = \left(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\right) dx \\ dv &= e^{-2x} dx \Longrightarrow v = -\frac{e^{-2x}}{2} \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-2x} \operatorname{sen}(x) \cos(x)\, dx &= -\frac{e^{-2x}}{2} \operatorname{sen}(x) \cos(x) \bigg|_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \frac{e^{-2x}}{2} \left(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\right) dx \\ &= \int_0^\pi \frac{e^{-2x}}{2} \left(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\right) dx \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x,$$

podemos poner

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{e^{-2x}}{2} \left(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\right) dx &= \int_0^\pi \frac{e^{-2x}}{2} \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2(x)\right) dx \\ &= \int_0^\pi \frac{e^{-2x}}{2} dx - \int_0^\pi e^{-2x} \operatorname{sen}^2(x)\, dx \\ &= \int_0^\pi \frac{e^{-2x}}{2} dx - I, \end{aligned}$$

de este modo hemos obtenido la siguiente relación:

$$I = \int_0^\pi \frac{e^{-2x}}{2}dx - I \Rightarrow 2I = \int_0^\pi \frac{e^{-2x}}{2}dx$$

y por tanto

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{e^{-2x}}{2}dx = \frac{1}{4}\int_0^\pi e^{-2x}dx = -\frac{1}{4}\frac{e^{-2x}}{2}\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2\pi},$$

y obtenemos el valor del volumen:

$$V = \pi I = \frac{\pi}{8}\left(1 - e^{-2\pi}\right).$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   $a)$ (**0.2 puntos**) Estudia la continuidad de $f(x,y)$ en el origen.

   $b)$ (**0.4 puntos**) Estudia la existencia de las derivadas parciales de $f(x,y)$ en el origen.

   $c)$ (**0.2 puntos**) Estudia la diferenciabilidad de $f(x,y)$ en el origen.

Solución:

$a)$ Usando aproximaciones lineales de la forma $y = mx$, podemos comprobar que la función NO es continua

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=\lambda x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\lambda x)}{x^2+(\lambda x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\lambda}{x^2+\lambda^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\lambda}{x^2\left(1+\lambda^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

que como depende de λ el límite no existirá y por tanto la función $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.

NOTA: También podemos comprobar que no es continua usando el cambio a polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

que depende de θ y por tanto la función no será continua.

$b)$ Usamos la definición de derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot 0}{t^2+0^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t}{0^2+t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0,$$

luego las derivadas parciales existen y ambas valen 0.

c) Como la función no es continua en $(0,0)$, entonces NO puede ser diferenciable en ese punto.

NOTA: Como en el apartado anterior hemos calculado las derivadas parciales, podemos comprobar la diferenciabilidad usando la definición

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f((0,0)+(h,k)) - f(0,0) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

y usando polares $h = r\cos\theta$, $k = r\operatorname{sen}\theta$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r^3} = \lim_{r\to 0} \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r} = \infty \neq 0,$$

luego no es diferenciable.

3. **(1.6 puntos)** Resuelve el siguiente problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2+y^2+z^2 \\ & -y+x=0 \\ & 6x^2+y^2+3z^2-1=0 \end{array}$$

Solución: Usamos el teorema de los multiplicadores de Lagrange, un multiplicador para cada restricción

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+y^2+z^2+\lambda(-y+x)+\mu\left(6x^2+y^2+3z^2-1\right),$$

y planteamos la ecuación vectorial

$$\nabla L = 0.$$

Derivando respecto de cada variable

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \iff 2x+\lambda+12\mu x = 0 && (1)\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \iff 2y-\lambda+2\mu y = 0 && (2)\\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \iff 2z+6\mu z = 0 && (3)\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0 \iff -y+x = 0 && (4)\\
\frac{\partial L}{\partial \mu} &= 0 \iff 6x^2+y^2+3z^2-1 = 0 && (5)
\end{aligned}$$

De (4) obtenemos

$$y = x$$

por lo tanto el sistema queda

$$\begin{aligned}
&2x+\lambda+12\mu x = 0 && (6)\\
&2x-\lambda+2\mu x = 0 && (7)\\
&2z+6\mu z = 0 && (8)\\
&7x^2+3z^2-1 = 0 && (9)
\end{aligned}$$

De la ecuación (8) o (3) ya que es la misma, podemos sacar factor común $2z$ para poner

$$2z + 6\mu z = 0 \Longleftrightarrow 2z(1 + 3\mu) = 0,$$

de donde tenemos dos opciones

$$\begin{aligned} z &= 0, \\ & \text{o} \\ \mu &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Para el caso $z = 0$ usamos la ecuación (9) para obtener el valor de x

$$7x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{7} \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{7}}.$$

Sumando (6) y (7) obtenemos una relación entre μ y x

$$4x + 14\mu x = 0 \Leftrightarrow 2x(2 + 7\mu) = 0,$$

y como $x \neq 0$, entonces

$$\mu = -\frac{2}{7}$$

y sustituyendo en (1) finalmente obtenemos el valor de λ, uno para cada valor de x

$$\lambda = -2x(1 + 6\mu) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{7}} \Longrightarrow \lambda = -2\frac{1}{\sqrt{7}}\left(1 + 6\left(-\frac{2}{7}\right)\right) = \frac{-2}{\sqrt{7}}\left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{10}{7\sqrt{7}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{7}} \Longrightarrow \lambda = 2\frac{1}{\sqrt{7}}\left(1 + 6\left(-\frac{2}{7}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{7}}\left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{10}{7\sqrt{7}} \end{cases}$$

Hemos obtenido dos puntos

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, 0\right), \quad \lambda = \frac{10}{7\sqrt{7}}, \quad \mu = -\frac{2}{7} \\ P_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, 0\right), \quad \lambda = -\frac{10}{7\sqrt{7}}, \quad \mu = -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

Ahora estudiamos el caso $\mu = -\frac{1}{3}$, en ese caso el sistema queda

$$\begin{array}{ll} -2x + \lambda = 0 & (10) \\ \frac{4}{3}x - \lambda = 0 & (11) \\ 7x^2 + 3z^2 - 1 = 0 & (12) \end{array}$$

El sistema formado por (10) y (11) es lineal y tiene como solución única la trivial, luego

$$x = \lambda = 0$$

y usando este valor en (12)

$$3z^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow z^2 = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

y hemos obtenido o tros dos puntos junto con sus multiplicadores

$$\begin{aligned} P_3 &= \left(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \lambda = 0, \quad \mu = -\frac{1}{3} \\ P_4 &= \left(0,0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \lambda = 0, \quad \mu = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Evaluando la función en estos puntos obtendremos el máximo y el mínimo del problema

$$\begin{aligned} f\left(P_1\right) &= f\left(\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 0^2 = \frac{2}{7} \\ f\left(P_1\right) &= f\left(-\frac{1}{\sqrt{7}},-\frac{1}{\sqrt{7}},0\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 0^2 = \frac{2}{7} \\ f\left(P_1\right) &= f\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} \\ f\left(P_1\right) &= f\left(0,0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Luego P_1 y P_2 serán mínimos, mientras que P_3 y P_4 serán máximos globales.

4. Sea la ecuacion

$$z^3 + xz + y = 0$$

a) **(0.4 puntos)** Demuestra que esta ecuación define a la variable z como función implícita de (x,y) en un entorno del punto $a = (1,-2,1)$.

b) **(0.4 puntos)** Calcula el gradiente de $z(x,y)$ en el punto $P = (1,-2)$.

c) **(0.6 puntos)** Calcula el hessiano de $z(x,y)$ en el punto $P = (1,-2)$.

d) **(0.4 puntos)** Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 de $z(x,y)$ en el punto $P = (1,-2)$

Solución:

a) Tomando

$$F(x,y,z) = z^3 + xz + y,$$

la ecuación se puede poner como

$$F(x,y,z) = 0.$$

Para que la ecuación dad defina a z como función implícita de (x,y) en un entorno del punto $a = (1,-2,1)$ tenemos que comprobar que $F(a) = 0$ y que $\frac{\partial F}{\partial z}(a) \neq 0$

$$\begin{aligned} F(1,-2,1) &= 1^3 + 1\cdot 1 + (-2) = 1 + 1 - 2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= 3z^2 + x \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(a) = 3\cdot 1^2 + 1 = 4 \neq 0 \end{aligned}$$

Luego la tesis es cierta y z es función implícita de x e y, con $z(1,-2) = 1$.

b) Para calcular el gradiente de z tenemos que obtener las derivadas parciales de z respecto de x e y, para ello derivamos la ecuación parcialmente respecto de x e y, teniendo en cuenta que $z \equiv z(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z^3 + xz + y\right) = \frac{\partial}{\partial x}(0) \Longleftrightarrow 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + \left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(z^3 + xz + y\right) = \frac{\partial}{\partial y}(0) \Longleftrightarrow 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0 \quad (2)$$

y puesto que $z(1, -2) = 1$

$$\begin{aligned}
3z(1,-2)^2\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2) + \left(z(1,-2) + 1\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2)\right) &= 0 \\
3 \cdot 1^2\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2) + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}(1,-2)\right) &= 0 \\
4\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2) &= -1 \\
\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2) &= -\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3z(1,-2)^2\frac{\partial z}{\partial y}(1,-2) + 1 \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(1,-2) + 1 &= 0 \\
3 \cdot 1^2\frac{\partial z}{\partial y}(1,-2) + \frac{\partial z}{\partial y}(1,-2) + 1 &= 0 \\
4\frac{\partial z}{\partial y}(1,-2) &= -1 \\
\frac{\partial z}{\partial y}(1,-2) &= -\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

luego

$$\nabla z(1,-2) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right).$$

c) Para calcular el hessiano de z tenemos que obtener las derivadas parciales segundas de z respecto de x e y, para ello derivaremos parcialmente respecto de x e y las ecuaciones (1) y (2). Mientras que para la ecuación (1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + \left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial x}(0) \\
6z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) &= 0 \\
6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{(A)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial y}(0) \\
6z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} &= 0 \quad \text{(B)}
\end{aligned}$$

Mientras que si tomamos (2) y derivamos parcialmente respecto de x y respecto de y, primero respecto de x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(3z^2\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial y}+1\right) &= \frac{\partial}{\partial x}(0) \\
6z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= 0 \quad \text{(C)}
\end{aligned}$$

Y ahora respecto de y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(3z^2\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial y}+1\right) &= \frac{\partial}{\partial y}(0) \\
6z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}+3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0 \\
6z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{(D)}
\end{aligned}$$

y finalmente el hessiano de z en $(1,-2)$ se obtiene evaluando las ecuaciones (A), (B) , (C) y (D) en $(1,-2)$, teniendo en cuenta que $z\,(1,-2)=1$, y por el apartado anterior $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2) = -\frac{1}{4}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,-2) = -\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{ll}
\text{(A)} & 6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \\
& 6\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 3\cdot(1)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-2) + 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 1\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \\
& 6\frac{1}{16} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-2) - \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-2) = 0 \Rightarrow \\
& 4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-2) = \frac{1}{2} - \frac{6}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-2) = \frac{1}{32}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(B)} & 6z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 0 \Rightarrow \\
& 6\cdot 1\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + 3\cdot 1^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,-2) + \left(-\frac{1}{4}\right) + 1\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,-2) = 0 \Rightarrow \\
& 6\frac{1}{16} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,-2) - \frac{1}{4} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,-2) = 0 \Rightarrow \\
& 4\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,-2) = \frac{1}{4} - \frac{6}{16} = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,-2) = -\frac{1}{32}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(C)} & 6z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0 \Rightarrow \\
& 6\cdot 1\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + 3\cdot 1^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,-2) - \frac{1}{4} + 1\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,-2) = 0 \Rightarrow \\
& \frac{6}{16} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,-2) - \frac{1}{4} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,-2) = 0 \Rightarrow \\
& 4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,-2) = \frac{1}{4} - \frac{6}{16} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,-2) = -\frac{1}{32}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(D)} & 6z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \\
& 6\cdot 1\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 3\cdot 1^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-2) + 1\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-2) = 0 \Rightarrow \\
& \frac{6}{16} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-2) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-2) = 0 \Rightarrow \\
& 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-2) = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-2) = -\frac{3}{32}
\end{array}$$

Y el hessiano buscado será

$$Hz(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{32} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{32} & -\frac{3}{32} \end{pmatrix} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

que como podemos comprobar es simétrico.

d) Con los datos de los apartados anteriores el poliniomio de Taylor de 2^o orden es

$$P(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0)\, Hf(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

cuando evaluamos en el punto $(x_0,y_0) = (1,-2)$

$$\begin{aligned}
P(x,y) &= 1 + \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y+2)\begin{pmatrix} \frac{1}{32} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{32} & -\frac{3}{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} \\
&= 1 - \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{4}(y+2) + \frac{1}{64}(x-1)^2 - \frac{1}{32}(x-1)(y+2) - \frac{3}{64}(y+2)^2
\end{aligned}$$

5. Resuelve el siguiente problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 y'(x) + x(x+2)\,y(x) = e^x \\ \\ y(1) = e \end{array}\right. \qquad \textbf{(1.6 puntos)}$$

a) ¿Porqué no es posible encontrar una solución al problema si tomáramos como condición inicial $y(0) = A$?, siendo $A \in \mathbb{R}$. (**0.4 puntos**)

Solución: Es una ecuación lineal de primer orden no homogénea de coeficientes variables que resolvemos mediante el método de variación de las constantes. Para ello resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea (cambiamos $y(x)$ por y, por comodidad)

$$x^2 y' + x(x+2)y = 0$$

que es una ecuación en variables separables

$$x^2 y' = -x(x+2)y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{x(x+2)}{x^2} = -\frac{x+2}{x} = -1 - \frac{2}{x}$$

Integrando en ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned} \int \frac{y'}{y}dx &= \int \left(-1 - \frac{2}{x}\right)dx \\ \ln(y) &= -x - 2\ln(x) + C \\ \ln(y) &= -x + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + C \end{aligned}$$

y aplicando la función exponencial en ambos lados

$$e^{\ln(y)} = e^{-x+\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)+C} = e^{-x}e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}e^{C}$$

que nos da como solución de la homogénea

$$y_h(x) = \frac{B}{x^2}e^{-x}$$

Para encontrar la solución de la EDO no homogénea, supondremos que $B \equiv B(x)$ y que la solución es de la forma

$$y(x) = \frac{B(x)e^{-x}}{x^2}$$

derivando para obtener $y'(x)$

$$y'(x) = \frac{(B'(x)e^{-x} - B(x)e^{-x})x^2 - 2xB(x)e^{-x}}{x^4}$$

y simplificando un factor x

$$y'(x) = \frac{(B'(x)e^{-x} - B(x)e^{-x})x - 2B(x)e^{-x}}{x^3} = \frac{B'(x)e^{-x}}{x^2} - \frac{B(x)e^{-x}}{x^2} - \frac{2B(x)e^{-x}}{x^3}$$

Sustituimos la expresión de $y(x)$ e $y'(x)$ en la edo no homogénea para obtener $B(x)$

$$\begin{aligned}
x^2y' + x(x+2)y &= e^x \\
x^2\left(\frac{B'(x)e^{-x}}{x^2} - \frac{B(x)e^{-x}}{x^2} - \frac{2B(x)e^{-x}}{x^3}\right) + x(x+2)\left(\frac{B(x)e^{-x}}{x^2}\right) &= e^x \\
B'(x)e^{-x} - B(x)e^{-x} - \frac{2B(x)e^{-x}}{x} + (x+2)\frac{B(x)e^{-x}}{x} &= e^x \\
B'(x)e^{-x} - B(x)e^{-x} - \frac{2B(x)e^{-x}}{x} + B(x)e^{-x} + 2\frac{B(x)e^{-x}}{x} &= e^x \\
B'(x)e^{-x} &= e^x \\
B'(x) &= e^{2x}
\end{aligned}$$

e integrando

$$B(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + K$$

y la solución de la ecuación no homogénea es

$$y(x) = \frac{B(x)e^{-x}}{x^2} = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + K\right)\frac{e^{-x}}{x^2}$$

Aplicamos la condición inicial $y(1) = e$, para obtener el valor adecuado para la K

$$\begin{aligned}
y(1) &= \left(\frac{1}{2}e^2 + K\right)e^{-1} = e \\
\frac{1}{2}e^2 + K &= e^2 \\
K &= \frac{1}{2}e^2.
\end{aligned}$$

a) No es posible encontrar la solución si planteamos el problema con la condición inicial $y(0) = A$, puesto que si despejamos y' en términos de x e y

$$y' = -\frac{x(x+2)y}{x^2} = -\frac{x+2}{x}y = f(x,y)$$

vemos que la función $f(x,y)$ no es continua en $x = 0$.

NOTA: También podemos comprobarlo sustituyendo directamente en la EDO, ya que para $x = 0$

$$x^2y' + x(x+2)y = e^x\Big|_{x=0}$$

$$\begin{aligned}
0^2y'(0) + 0(0+2)y(0) &= e^0 \\
0 &= 1\sharp
\end{aligned}$$

lo que es absurdo.

6. (**1.4 puntos**) Encuentra la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$y^{iv}(x) - 2y'''(x) + 2y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x + e^{2x}$$

Solución: Ecuación diferencial ordinaria de orden 4, lineal, no homogénea y con coeficientes constantes, así que la resolveremos utilizando las raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + \lambda$$

La ecuación

$$p(\lambda) = 0$$

se resuelve muy fácilmente con la regla de Ruffini, para encontrar las 4 raíces

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = 1 \text{ (raíz real doble)} \\ &\left.\begin{array}{c} \lambda_3 = i \\ \lambda_4 = -i \end{array}\right\} \text{ (raíz compleja simple)} \end{aligned}$$

Las raíces de la edo homogénea serán de la format

$$y_h(x) = Ae^x + Bte^x + C\cos x + D\operatorname{sen} x$$

Para encontar la solución particular usamos la expresión del término independiente $x+e^{2x}$, que es un polinomio de grado 1 y una función exponencial, por tanto probamos con funciones de la forma

$$y_p(x) = \alpha + \beta x + \gamma e^{2x}$$

Derivando hasta el orden 4

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \beta + 2\gamma e^{2x} \\ y_p(x) &= 4\gamma e^{2x} \\ y_p(x) &= 8\gamma e^{2x} \\ y_p(x) &= 16\gamma e^{2x} \end{aligned}$$

y sustituyendo en la EDO no homogénea

$$\begin{aligned} y^{iv}(x) - 2y'''(x) + 2y''(x) - 2y'(x) + y(x) &= x + e^{2x} \\ \left(16\gamma e^{2x}\right) - 2\left(8\gamma e^{2x}\right) + 2\left(4\gamma e^{2x}\right) - 2\left(\beta + 2\gamma e^{2x}\right) + \left(\alpha + \beta x + \gamma e^{2x}\right) &= x + e^{2x} \\ (\alpha - 2\beta) + \beta x + 5\gamma e^{2x} &= x + e^{2x} \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned} \alpha - 2\beta &= 0 \\ \beta &= 1 \\ 5\gamma &= 1 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned}\alpha &= 2\\ \beta &= 1\\ \gamma &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

siendo la solución particular

$$y_p(x) = 2 + x + \frac{1}{5}e^{2x}$$

y la solución general de la EDO

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Bte^x + C\cos x + D\operatorname{sen} x + 2 + x + \frac{1}{5}e^{2x}$$

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(x,y,z) = (x^2 - y^2, x + y + z^2)$, y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(u,v) = (u + v, u^2 - uv)$, se pide

   a) (0.25 puntos) Calcula la matriz Jacobiana de f en el punto $(1,1,1)$

   b) (0.25 puntos) Calcula la matriz Jacobiana de g en el punto $(0,3)$

   c) (0.25 puntos) Calcula la matriz Jacobiana de $h = g \circ f$ en el punto $(1,1,1)$

2. (**1.5 puntos**) Resuelve el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+y}{1-x-y} \\ y(2) &= -2 \end{aligned}$$

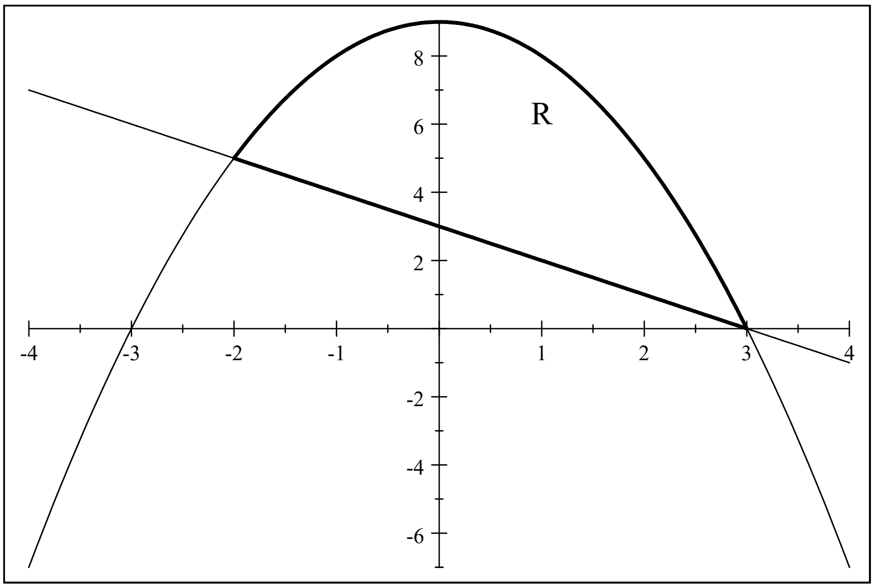
3. (**1.5 puntos**) Resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$y' - xy = (x-1)e^x$$

4. Resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$y' - y = xy^2$$

5. Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + 2y$, en el recinto R limitado por la recta $y = -x + 3$ y la parábola $y = -x^2 + 9$.



6. Resuelve el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x \\ & x + y + z = 1 \\ & x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{array}$$