industriales
etsii UPCT

Curso 2020/2021
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas tema 2 - Soluciones
Números complejos

1. Dados los números complejos $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = 4 + 4\sqrt{3}i$, realiza las siguientes operaciones

   a) Halla sus módulos y argumentos

   b) Calcula

$$\text{(i) } \overline{z_1} + 6z_2 \quad \text{(ii) } 3z_1\overline{z_2} \quad \text{(iii) } z_1\,|z_2|\,i \quad \text{(iv) } z_1^3 \quad \text{(v) } \frac{2z_2}{-z_1}$$

2. Dados los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$, calcula:

$$\text{a) } z_1 + z_2 \quad \text{b) } 3z_1 - 2z_2 \quad \text{c) } z_1 z_2 \quad \text{d) } (z_2)^{-1} \quad \text{e) } \frac{z_1}{z_2}$$

3. Determina los valores de x e y para que se cumpla la igualdad $(1+i)(x+iy) = i$.

4. Calcula el módulo de los números complejos:

$$\text{a) } 3+4i \qquad \text{b) } \tfrac{1+i}{1-i} \qquad \text{c) } i^7 + i^{10} \qquad \text{d) } 1 + i + i^2$$

5. Expresa en forma polar o exponencial los siguientes números complejos:

$$\text{a) } 2i \qquad \text{b) } -3i \qquad \text{c) } -1 \qquad \text{d) } 3 \qquad \text{e) } \tfrac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\text{f) } -3 + i\sqrt{3} \quad \text{g) } \tfrac{1+i}{1-i} \qquad \text{h) } i^7 + i^{10} \quad \text{i) } 3+3i \quad \text{j) } 1+i+i^2$$

6. Expresa los siguientes números complejos en forma binómica:

a) $(1+i)^3$	b) $\frac{2+3\,i}{3-4\,i}$	c) $i^5 + i^{16}$	d) $1+i+i^2+i^3$	e) $\dfrac{1}{i}$
f) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$	g) $2_{\pi/2}$	h) $1_{\pi/4}$	i) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$	j) $(2+2i)^2$
k) $(2-2i)^2$	l) $(2+2i)(2-2i)$	m) $e^{-i\pi/2}$	n) $2e^{-i\pi}$	o) $3e^{-i\pi/2}$
p) $2e^{-i\pi/4}$	q) $i + 3e^{i2\pi}$	r) $e^{i\pi/4} - 2e^{-i\pi/4}$	s) $\frac{1}{e^{-i\pi/4}}$	t) $\sqrt{2}e^{i\pi/3}$

7. Representa gráficamente los conjuntos dados por las expresiones siguientes:

a) $\lvert z\rvert \le 1$	b) $z + \overline{z} \ge \lvert z\rvert^2$	c) $z + \overline{z} \le 1$	d) $z - \overline{z} = i$
e) $\mathrm{Im}\,(z) < 0$	f) $\lvert\mathrm{Re}\,(z)\rvert < 1$	g) $\mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z) = z\overline{z}$	h) $\lvert z\rvert^{-1} \le 1,\ (z \ne 0)$
i) $\lvert z - 5i\rvert = 8$	j) $\mathrm{Im}\left(z^2\right) > 2$	k) $\mathrm{Re}\left(\overline{z^{-1}}\right) = 1$	l) $\mathrm{Re}\left(z^2 - z\right) = 0$
m) $\lvert z - 1\rvert = \lvert 1 - 2\overline{z}\rvert$	n) $2 < \lvert z\rvert < 3$	o) $\left\lvert\dfrac{z-1}{z+1}\right\rvert \le 1$	p) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$

8. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

$$\text{a) } (1+i)^{100} \qquad \text{b) } \left(-1+\sqrt{3}i\right)^{30} \qquad \text{c) } \left(\sqrt{1-i}\right)^{10} \qquad \text{d) } \frac{1}{(1-i)^5}$$

9. Deduce una fórmula para calcular cualquier potencia de i^n con $n \in \mathbb{N}$.

10. Calcula las siguientes raíces:

   a) $\sqrt[3]{1}$ b) $\sqrt[3]{i}$ c) $\sqrt[6]{-8}$ d) $\sqrt[4]{-1}$ e) $\sqrt[8]{1}$ f) $\sqrt[4]{-81}$ g) $\sqrt{1-i}$

   h) $\sqrt{3+3i}$ i) $\sqrt[3]{-2+2i}$ j) $\sqrt[3]{-1+i}$ k) $\sqrt[4]{-8\left(1-\sqrt{3}i\right)}$ l) $\sqrt[4]{1}$ m) $\sqrt[6]{1}$ n) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$

11. Resuelve en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } z^2+1=0 \quad \text{b) } z^3+2=0 \quad \text{c) } z^5+64=0 \quad \text{d) } (z^2+4)(z-1)^2=0$$

12. Resuelve en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{C}$:

$$\text{a) } z^2-(2+i)\,z+(9+i)=0 \quad \text{b) } z^2-2\,(2-i)\,z+3\,(1-2i)=0 \quad \text{c) } z^4+64=0$$

13. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

$$\text{a) } (1+i)^{2/3} \quad \text{b) } \left(1+\sqrt{3}i\right)^{3/4}$$

14. Utiliza la fórmula de Moivre para obtener $\cos(3x)$ y $\operatorname{sen}(3x)$ en función de $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$. ¿Cuál será la relación para $\cos(4x)$ y $\operatorname{sen}(4x)$?

15. Resuelve: $\overline{z} = z^{n-1}$, siendo $n \in \mathbb{N}-\{2\}$.

Soluciones:

1. a) $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$; $|z_2| = 8$, $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$; b) (i) $25 + \left(1+24\sqrt{3}\right)i$; (ii) $12\left(1-\sqrt{3}\right) - 12\left(1+\sqrt{3}\right)i$; (iii) $8+8i$; (iv) $-2-2i$; (v) $4\left(\sqrt{3}-1\right) - 4\left(\sqrt{3}+1\right)i$.

2. a) $5-i$; b) $7i$; c) $8-i$; d) $\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$; e) $\frac{4}{13}+\frac{7}{13}i$.

3. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

4. a) 5; b) 1; c) $\sqrt{2}$; d) 1.

5. a) $2e^{i\pi/2}$; b) $3e^{-i\pi/2}$; c) $e^{i\pi}$; d) $3e^{i2\pi}$; e) $e^{i\pi/4}$; f) $2\sqrt{3}e^{i5\pi/6}$; g) $e^{i\pi/2}$; h) $\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$; i) $3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$; j) $e^{i\pi/2}$.

6. a) $-2+2i$; b)$-\frac{6}{25}+\frac{17}{25}i$; c) $1+i$; d) 0; e) $-i$; f) -8; g) $2i$; h) $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$; i) $-i$; j) $8i$; k) $-8i$; l) 8; m) $-i$; n) -2; o) $-3i$; p) $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; q) $3+i$; r) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; s) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; s)$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$.

7. (a) $x^2+y^2\leq 1$: Ecuación del círculo de centro $(0,0)$ y radio 1. (b) $(x-1)^2+y^2\leq 1$: Ecuación del círculo de centro $(1,0)$ y radio 1. (c) $x\leq\frac{1}{2}$: Semiplano a la izquierda de abcisa $\frac{1}{2}$. (d) $y=\frac{1}{2}$: Recta horizontal $\left(x,\frac{1}{2}\right)$. (e) $y<0$: Semiplano abierto de ordenadas negativas. (f) $-1<x<1$: Banda vertical simétrica de anchura 2. (g) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$: Ecuación de la círcunferencia de centro $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (h) $x^2+y^2\geq 1$: Exterior del círculo de centro $(0,0)$ y radio 1. (i) $x^2+(y-5)^2=64$: Ecuación de la circunferencia de centro $(0,5)$ y radio 8. (j) $xy>1$: La frontera del conjunto es la hipérbola de ecuación $y=\frac{1}{x}$.. (k) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$: Ecuación de la circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$. (l) $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{1/4}-\frac{y^2}{1/4}=1$: Ecuación de la hipérbola centrada en $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y semiejes $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$. (m) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{1}{9}$: Circunferencia de centro $\left(\frac{1}{3},0\right)$ y radio $\frac{1}{3}$.(n) $x^2+y^2<9$: Anillo (o corona circular) de centro $(0,0)$ y radios 2 y 3. (o) $x\geq 0$: Semiplano a la derecha de la abcisa $x=0$. (p) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$: Circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$, menos el punto $(0,0)$, ya que no tiene inverso.

8. a) $-2^{50}=1125\,899\,906\,842\,624$; b) $2^{30}=1073741824$; c) $-4+4i$; d) $-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}i$.

9. $n=4c+r$; $i^n=i^r$es decir, i^n tiene el mismo valor que i^r con r el resto de la división por 4 de n.

10. a) $w_0=1$; $w_1=e^{i2\pi/3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $w_2=e^{i4\pi/3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $w_0=e^{i\pi/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $w_1=e^{i5\pi/6}=\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $w_2=e^{i9\pi/6}=-i$; c) $w_0=\sqrt{2}e^{i\pi/6}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_1=\sqrt{2}e^{i\pi/2}=\sqrt{2}i$; $w_2=\sqrt{2}e^{i5\pi/6}=-\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_3=\sqrt{2}e^{i7\pi/6}=-\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_4=\sqrt{2}e^{i3\pi/2}=-\sqrt{2}i$; $w_5=\sqrt{2}e^{i11\pi/6}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; d) $w_0=e^{i\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_1=e^{i3\pi/4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_2=e^{i5\pi/4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_3=e^{i7\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; e) $w_0=1$; $w_1=e^{i\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_2=e^{i\pi/2}=i$; $w_3=e^{i3\pi/4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_4=e^{i\pi}=-1$; $w_5=e^{i5\pi/4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $w_6=e^{i3\pi/2}=-i$; $w_7=e^{i7\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; f) $w_0=3e^{i\pi/4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $w_1=3e^{i3\pi/4}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $w_2=3e^{i5\pi/4}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $w_3=3e^{i7\pi/4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$; g) $w_0=\sqrt[4]{2}e^{-i\pi/8}=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i\right)$; $w_1=\sqrt[4]{2}e^{i7\pi/8}=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i\right)$; h) $w_0=\sqrt{3}\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}=\sqrt{3}\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i\right)$; $w_1=\sqrt{3}\sqrt[4]{2}e^{i9\pi/8}=-\sqrt{3}\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i\right)$; i) $w_0=\sqrt{2}e^{i\pi/4}=1+i$; $w_1=\sqrt{2}e^{i11\pi/12}=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$; $w_2=\sqrt{2}e^{i19\pi/12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$; j) $w_0=\sqrt[6]{2}e^{i\pi/4}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i)$; $w_1=\sqrt[6]{2}e^{i11\pi/12}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i\right)$; $w_2=\sqrt[6]{2}e^{i19\pi/12}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right)$; k) $w_0=2e^{i\pi/6}=\sqrt{3}+i$; $w_1=2e^{i2\pi/3}=-1+i\sqrt{3}$; $w_2=2e^{i7\pi/6}=-\sqrt{3}-i$; $w_3=2e^{i5\pi/3}=1-i\sqrt{3}$; l) $w_0=1$; $w_1=e^{i\pi/2}=i$; $w_2=e^{i\pi}=-1$; $w_3=e^{i3\pi/2}=-i$; m) $w_0=1$; $w_1=e^{i\pi/3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $w_2=e^{i2\pi/3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $w_3=e^{i\pi}=-1$; $w_4=e^{i4\pi/3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $w_5=e^{i5\pi/3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; n) $w_0=\sqrt[4]{2}e^{i\pi/6}=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$; $w_1=\sqrt[4]{2}e^{i2\pi/3}=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $w_2=\sqrt[4]{2}e^{i7\pi/6}=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$; $w_3=\sqrt[4]{2}e^{i5\pi/3}=\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

11. a) $z_1 = i$; $z_2 = -i$; (b) $w_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/3} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)$; $w_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2}$; $w_2 = \sqrt[3]{2}e^{i5\pi/3} = -\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)$; c) $w_0 = 2\sqrt[5]{2}e^{i\pi/5}$; $w_1 = 2\sqrt[5]{2}e^{i3\pi/5}$; $w_2 = 2\sqrt[5]{2}e^{i\pi}$; $w_3 = 2\sqrt[5]{2}e^{i7\pi/5}$; $w_4 = 2\sqrt[5]{2}e^{i9\pi/5}$; d) $z_1 = 2i$; $z_2 = -2i$; $z_3 = 1$; $z_{;4} = 1$.

12. a) $w_0 = 1 + i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}\right)$; $w_1 = 1 + i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}\right)$; b) $w_0 = 3$; $w_1 = 1 - 2i$; c) $w_0 = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2 + 2i$; $w_1 = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4} = -2 + 2i$; $w_2 = 2\sqrt{2}e^{i5\pi/4} = -2 - 2i$; $w_3 = 2\sqrt{2}e^{i7\pi/4} = 2 - 2i$.

13. a) $w_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/6} : \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right)$; $w_1 = \sqrt[3]{2}e^{i5\pi/6} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$; $w_2 = \sqrt[3]{2}e^{i3\pi/2} = -i\sqrt[3]{2}$; b) $w_0 = \sqrt[4]{8}e^{i\pi/4} = \sqrt[4]{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$; $w_1 = \sqrt[4]{8}e^{i3\pi/4} = \sqrt[4]{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$; $w_2 = \sqrt[4]{8}e^{i5\pi/4} = \sqrt[4]{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$; $w_3 = \sqrt[4]{8}e^{i7\pi/4} = \sqrt[4]{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.

14. $\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x$; $\operatorname{sen}(3x) = 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$; $\cos(4x) = \cos^4 x - 6\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x$; $\operatorname{sen}(4x) = 4\cos^3 x \operatorname{sen} x - 4\cos x \operatorname{sen}^3 x$.

15. $z_0 = 0$; si $n \neq 2 \Rightarrow w_k = e^{i2k\pi/n}, \quad k = 0, \ldots, n-1$; si $n = 2 \Rightarrow w_k = r \in \mathbb{R}$.