1. Determinar el rango de las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \\ 8 & 10 & 8 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} i & 0 & 5 \\ 6 & 1+i & 3 \\ 8 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{pmatrix}$$

Solución: Usando escalonamiento de cada matriz:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - \frac{4}{3}F_1 \\ F_3' = F_2 - \frac{5}{3}F_1 \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1'' = F_1 \\ F_2'' = F_2' \\ F_3'' = F_3' - 5F_2' \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3 \end{aligned}$$

Aunque también podríamos usar el determinante

$$\det(A) = (-12+30+0) - (10+0+-16) = 18+6 = 24 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \\ 8 & 10 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - 3F_1 \\ F_3' = F_2 - 4F_1 \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1'' = F_1 \\ F_2'' = F_2' \\ F_3'' = F_3' - F_2' \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(B) = 2 \end{aligned}$$

También podremos usar el determinante de B

$$\det(B) = (112 + 72 + 300) - (280 + 144 + 60) = (484) - (484) = 0$$

luego el rango no puede ser 3. Hay un menor de orden dos distinto de 0

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 14 - 18 = -4 \neq 0$$

por lo tanto el rango es 2, como antes.

Para la matriz C, se procede de la misma forma, con la única diferencia que el conjunto de escalares es el plano complejo $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} i & 0 & 5 \\ 6 & 1+i & 3 \\ 8 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - \frac{6}{i}F_1 \\ F_3' = F_2 - \frac{8}{i}F_1 \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 & 5 \\ 0 & 1+i & 3+30i \\ 0 & 0 & 1+39i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y como ya está escalonada el rango será

$$r(C) = 3$$

También podemos calcular su determinante, que al tener una columna de 0, podemos desarrollar por los elementos de esa columna

$$\det(C) = (1+i)\det\left(\begin{pmatrix} i & 5 \\ 8 & 1-i \end{pmatrix}\right) = (1+i)\left((i(1-i) - 40)\right) = (1+i)(1+i-40) = (1+i)(-39+$$

determinante que es no nulo y por tanto el rango de C será 3, igual que antes.

Para la matriz D

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_2 \\ F_2' = F_1 \\ F_3' = F_3 \\ F_4' = F_4 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1'' = F_1' \\ F_2'' = F_2' + 2F_1' \\ F_3'' = F_3' - F_1' \\ F_4'' = F_4' - 3F_1' \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1''' = F_1'' \\ F_2''' = F_2'' \\ F_3''' = F_4'' \\ F_4''' = F_3'' \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1^4 = F_1''' \\ F_2^4 = F_2''' \\ F_3^4 = F_3''' + 4F_2''' \\ F_4^4 = F_4''' \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(D) = 3$$

Y para la matriz E

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 - F_1 \\ F_4' = F_4 - 2F_1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1'' = F_1' \\ F_2'' = F_2' \\ F_3'' = F_3' + F_2' \\ F_4'' = F_4' + F_2' \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(E) = 2$$

Como son matrices 4×4, no usaremos el método de los determinantes que es demasiado costoso operacionalmente.

Para la matriz F

$$F = \begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_2 \\ F_2' = F_2 - F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & -i \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$$

se deduce que el rango es 2. En este caso sí que podemos usar el determinante para poner

$$\det(F) = (-i)(i) - (-i)(-i) = -i^2 - i^2 = 2 \neq 0.$$

2. Hallar la inversa de la matriz A. Comprueba el resultado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{pmatrix}$$

Solución: Primero comprobaremos si es o no invertible, calculando su determinante

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = P - N = 19 - 20 = -1 \\ P &= 1 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) \cdot (-1) = 8 + 2 + 9 = 19 \\ N &= (-1) \cdot 4 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot (1) \cdot (2) = 12 + 2 + 6 = 20 \end{aligned}$$

Calculamos transpuesta

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz adjunta

$$Adj\left(A^T\right) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 10 \\ -4 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y obtenemos la inversa dividiendo por el determinante

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{\det(A)} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -10 \\ 4 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos el resultado

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -1 & -10 \\ 4 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el caso de la matriz B, ya hemos comprobado en el ejercicio anterior que su determinante era $2 \neq 0$, por tanto será invertible. Calculamos su inversa mediante la fórmula de los determinantes, calculamos su traspuesta, al ser simétrica coincide con la matriz,

$$B^T = \begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{pmatrix}$$

y ahora su adjunta

$$Adj\left(B^T\right)=\begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix}$$

y dividimos por el determiante para obtener la inversa

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{\det(B)}=\begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

y comprobamos el resultado

$$B{\cdot}B^{-1}=\begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{i^2}{2}-\frac{i^2}{2} & -\frac{i^2}{2}+\frac{i^2}{2} \\ -\frac{i^2}{2}+\frac{i^2}{2} & -\frac{i^2}{2}-\frac{i^2}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Hallar el valor de los siguientes determinantes

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1-i & 2 & i \\ 1+i & 3-i & 1 \\ 0 & -i & i+2 \end{vmatrix}$

Solución:

a) Utilizaremos operaciones elementales entre columnas y teniendo en cuenta las modificaciones que se obtienen sobre el determinante con estas modificaciones. Cambiamos las columnas 1 y 4 por combinaciones lineales de esa columna y la columna 3, estas operaciones no modifican el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} C_1'=C_1-3C_3 \\ C_2'=C_2 \\ C_3'=C_3 \\ C_4'=C_4-4C_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 & -11 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por los elementos de la fila 1

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 & -11 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 0 \\ -11 & 4 & -11 \end{vmatrix}$$

y ahora desarrollamos por los elementos de la columna 3

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 0 \\ -11 & 4 & -11 \end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -11 & 4 \end{vmatrix}-11\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-4\,(-4+33)-11\,(9+2)=-237$$

b) Utilizaremos operaciones elementales entre filas y teniendo en cuenta las modificaciones que se obtienen sobre el determinante con estas modificaciones. Cambiamos las columnas 2, 3, 4 y 5 por combinaciones lineales de esa fila y la fila 3, estas operaciones no modifican el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 - 2F_1 \\ F_4' = F_4 + F_1 \\ F_5' = F_2 - 2F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por los elementos de la primera columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1'' = F_1' \\ F_2'' = F_2 + F_1 \\ F_3'' = F_3' \\ F_4'' = F_4' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

y desarrollamos ahora por los elementos de la segunda fila

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix} = (-1)\,(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ -5 & -5 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ -5 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ -5 & -5 & -10 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1''' = F_1'' \\ F_2''' = F_2'' - 3F_1'' \\ F_3''' = F_3'' + 5F_1'' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Esta última matriz es triangular superior así que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-5) = -10.$$

c) Desarrollamos directamente sobre los elementos de la primera columna

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-i & 2 & i \\ 1+i & 3-i & 1 \\ 0 & -i & i+2 \end{vmatrix} &= (1-i)\begin{vmatrix} 3-i & 1 \\ -i & i+2 \end{vmatrix} - (1+i)\begin{vmatrix} 2 & i \\ -i & i+2 \end{vmatrix} \\
&= (1-i)\left((3-i)(i+2) - 1\cdot(-i)\right) - (1+i)\left(2(i+2) - i\cdot(-i)\right) \\
&= (1-i)\left((7+i)+i\right) - (1+i)\left((2i+4)-1\right) \\
&= (1-i)(7+2i) - (1+i)(3+2i) \\
&= (9-5i) - (1+5i) \\
&= 8-10i
\end{aligned}
$$

4. Discutir y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$
(a)\begin{cases} x+2y-z-2t=5 \\ -2x-4y+2z+4t=-10 \\ y+t=1 \\ x+3y-z-t=6 \\ x-z-4t=3 \end{cases}
\quad
(b)\begin{cases} 2x-y+z=5 \\ -3x+2y+2z=0 \\ -x-2y+2z=0 \\ x+y+z=0 \\ 5x-6y-2z=0 \end{cases}
\quad
(c)\begin{cases} x+2y-3z+t=2 \\ 2x-y-z-t=1 \\ -x+y+2z-t=0 \\ 3x+2y-4z-3t=1 \end{cases}
$$

Solución: Utilizaremos el método de Gauss.

a)

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right)
\Rightarrow
\left\{\begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 + 2F_1 \\ F_3' = F_3 \\ F_4' = F_4 - F_1 \\ F_5' = F_5 - F_1 \end{array}\right\}
\Rightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)
$$

La fila 2 es nula, las filas 3 y 4 son iguales y la fila 5 es la fila 3 multiplicada por -2, por tanto el sistema queda como:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
\Rightarrow
\left\{\begin{array}{c} x+2y-z-2t=5 \\ \\ y+t=1 \end{array}\right\}
$$

Si tomamos

$$
\begin{aligned} z &= \alpha \\ t &= \beta \end{aligned}
$$

obtenemos de la 2 ecuación

$$y = 1 - t = 1 - \beta$$

y sustituyendo en la primera

$$x = 5 - 2y + z + 2t = 5 - 2(1 - \beta) + \alpha + 2\beta = 3 + 4\beta + \alpha$$

El sistema es compatible indeterminado con solución

$$(3 + \alpha + 4\beta, 1 - \beta, \alpha, \beta).$$

b)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1' = F_4 \\ F_2' = F_2 \\ F_3' = F_3 \\ F_4' = F_1 \\ F_5' = F_5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 5 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 5 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1'' = F_1' \\ F_2'' = F_2' + 3F_1' \\ F_3'' = F_3' + F_1' \\ F_4'' = F_4' + 2F_1' \\ F_5'' = F_5' - 5F_1' \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -11 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -11 & -7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1''' = F_1'' \\ F_2''' = \frac{1}{5}F_2'' \\ F_3''' = F_3'' \\ F_4''' = F_4'' \\ F_5''' = F_5'' \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -11 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -11 & -7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1'''' = F_1''' \\ F_2'''' = F_2''' \\ F_3'''' = F_3''' + F_2''' \\ F_4'''' = F_4''' + 3F_2''' \\ F_5'''' = F_5''' + 11F_2''' \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Las dos últimas ecuaciones nos dan

$$\begin{array}{rcl} 2z & = & 5 \\ 4z & = & 0 \end{array}$$

que es claramente incompatible. El sistema inicial es incompatible.

c)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 + F_1 \\ F_4' = F_4 - 3F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -6 & -5 \end{array}\right)$$

Intercambiamos columnas de la variable y (columna 2) y variable t (columna 4)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & -4 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1'' = F_1' \\ F_2'' = F_2' \\ F_3'' = F_3' \\ F_4'' = F_4 - 2F_2' \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1''' = F_1'' \\ F_2''' = F_2'' \\ F_3''' = F_3'' \\ F_4''' = F_4 - 5F_3' \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -9 \end{array}\right)$$

Obtenemos el sistema triangular, teniendo en cuenta el cambio en las variables

$$\left\{\begin{array}{l} x + t - 3z + 2y = 2 \\ -3t + 5z - 5y = -3 \\ -z + 3y = 2 \\ -9y = -9 \end{array}\right.$$

Que resolvemos fácilmente

$$\begin{array}{rcl} y & = & 1, \\ z & = & 3y - 2 = 3 \cdot 1 - 2 = 1, \\ t & = & \dfrac{1}{3}(5z - 5y + 3) = \dfrac{1}{3}(5 - 5 + 3) = 1, \\ x & = & 2 - t + 3z - 2y = 2 - 1 + 3 - 2 = 2. \end{array}$$

El sistema es compatible determinado con solución $s = (2, 1, 1, 1)$.