industriales
etsii UPCT

Curso 2020/2021
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas tema4
Espacios Vectoriales
Sistemas de vectores. Bases

1. Supongamos que una molécula de metano, en estado de equilibrio, tiene sus cuatro hidrógenos en las posiciones $r_1 = (a, a, a)$, $r_2 = (a, -a, -a)$, $r_3 = (-a, a, -a)$, $r_4 = (-a, -a, a)$, con el carbono en el centro. El momento dipolar de cada enlace viene dado por $\mu_i = \kappa r_i$, $1 \leq i \leq 4$, con κ una constante. Calcula el momento dipolar total $\mu = \sum_{i=1}^{4} \mu_i$.

2. Comprueba si los siguientes sistemas de vectores son LI, SG y/o base de los espacios vectoriales correspondientes, hallando en cada caso el rango del sistema:

   a) $S_1 = \{(1,1,1)\,;(1,2,1)\,;(1,3,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.
   b) $S_2 = \{(1,2,3,0)\,;(4,3,4,-16)\,;(7,3,4,5)\}$ de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.
   c) $S_3 = \{(1,0,0,-1)\,;(2,1,1,-2)\,;(0,1,1,0)\,;(1,1,1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.
   d) $S_4 = \{(4,-5,7)\,;(3,3,4)\,;(1,1,-2)\,;(2,-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.
   e) $S_5 = \{(1,i,2)\,;(0,1,-2i)\,;(3,1,5)\}$ de $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{R}$.
   f) $S_6 = \{(1,0,-1);(i,2,0);(1,-2i,0)\};(0,2i,-1)\}$ de $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{R}$.
   g) $S_7 = \{1+x; x+x^2; 1+x^2\}$ de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}] = \{$polinomios de grado menor o igual que $2\}$ sobre $\mathbb{R}$.
   h) $S_8 = \{(2,0,0)\,;(3,2,0)\,;(4,3,x)\}$ (con $x \in \mathbb{R}$) de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

3. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$?

   (a) $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2\}$.
   (b) $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 1\}$.
   (c) $U_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = 0\}$.
   (d) $U_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

4. Consideremos la base $B = \{(1,-1)\,;(2,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Se pide:

   (a) Representa gráficamente la base B en $\mathbb{R}^2$.
   (b) Encuentra la expresión del vector $v = (5,3)$ en la base B.
   (c) Si C es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ halla las matrices cambio de base $M_{B\to C}$ y $M_{C\to B}$.

5. Consideremos las siguientes bases de R^2: $B = \{(0,2)\,;(1,3)\}$ y $B' = \{(1,1)\,;(1,-1)\}$. Se pide:

   (a) Dibuja las bases B y B'.

(b) Halla las matrices cambio de base de B a B' y de B' a B, así como las ecuaciones del cambio de base de B a B' y de B' a B.

(c) Si u y v son vectores de $\mathbb{R}^2$ tales que $u_{B} = (-3, 5)$ y $v_{B'} = (0, 2)$, halla $u_{B'}$ y v_{B}.

6. Encuentra una base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

   a) $W_1 = \langle\{(2, -1, 0, 1)\,; (-2, 1, -3, 2)\}\rangle$.

   b) $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z + t = 0, y - z = 0\}$.

   c) $W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = 0\}$.

   d) W_4: $\left\{\begin{array}{c} x = \lambda + \alpha + \beta \\ y = \lambda - \alpha + 3\beta \\ z = \lambda + 2\alpha \\ t = 2\lambda + 3\alpha + \beta \end{array}\right.$

   e) $W_5 = \langle\{(1, -1, 0, 1)\,; (2, -1, 0, 2)\,; (-1, 2, 2, 0, -1)\}\rangle$.

7. Determina unas ecuaciones implícitas de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$

   $$U = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z - t = 0, x + 2y - z = 0\right\} \text{ y } W = \langle\{(1, -1, 0, 3)\,; (2, 1, -1, 2)\}\rangle\,,$$

   así como también de $U \cap W$ y de $U + W$. Concluye si la suma es directa o no.
