Curso 2020/21
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas tema 4 - Soluciones
Espacios Vectoriales
Sistemas de vectores. Bases

1. Supongamos que una molécula de metano, en estado de equilibrio, tiene sus cuatro hidrógenos en las posiciones $r_1 = (a, a, a)$, $r_2 = (a, -a, -a)$, $r_3 = (-a, a, -a)$, $r_4 = (-a, -a, a)$, con el carbono en el centro. El momento dipolar de cada enlace viene dado por $\mu_i = \kappa r_i$, $1 \leq i \leq 4$, con κ una constante. Calcula el momento dipolar total $\mu = \sum_{i=1}^{4} \mu_i$.

2. Comprueba si los siguientes sistemas de vectores son LI, SG y/o base de los espacios vectoriales correspondientes, hallando en cada caso el rango del sistema:

   a) $S_1 = \{(1,1,1)\,; (1,2,1)\,; (1,3,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.
   b) $S_2 = \{(1,2,3,0)\,; (4,3,4,-16)\,; (7,3,4,5)\}$ de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.
   c) $S_3 = \{(1,0,0,-1)\,; (2,1,1,-2)\,; (0,1,1,0)\,; (1,1,1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.
   d) $S_4 = \{(4,-5,7)\,; (3,3,4)\,; (1,1,-2)\,; (2,-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.
   e) $S_5 = \{(1,i,2)\,; (0,1,-2i)\,; (3,1,5)\}$ de $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{R}$. ¿Qué ocurre si el cuerpo es $\mathbb{C}$?
   f) $S_6 = \{(1,0,-1); (i,2,0); (1,-2i,0)\}; (0,2i,-1)\}$ de $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{R}$.. ¿Qué ocurre si el cuerpo es $\mathbb{C}$?
   g) $S_7 = \{1+x; x+x^2; 1+x^2\}$ de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}] = \{$polinomios de grado menor o igual que $2\}$ sobre $\mathbb{R}$.
   h) $S_8 = \{(2,0,0)\,; (3,2,0)\,; (4,3,x)\}$ (con $x \in \mathbb{R}$) de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

3. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$?

   (a) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2\}$.
   (b) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 1\}$.
   (c) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2x_3 = 0\}$.
   (d) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

4. Consideremos la base $B = \{(1,-1)\,; (2,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Se pide:

   (a) Representa gráficamente la base B en $\mathbb{R}^2$.
   (b) Encuentra la expresión del vector $v = (5,3)$ en la base B.
   (c) Si C es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ halla las matrices cambio de base $M_{B\to C}$ y $M_{C\to B}$.

5. Consideremos las siguientes bases de R^2: $B = \{(0,2)\,; (1,3)\}$ y $B' = \{(1,1)\,; (1,-1)\}$. Se pide:

   (a) Dibuja las bases B y B'.
   (b) Halla las matrices cambio de base de B a B' y de B' a B, así como las ecuaciones del cambio de base de B a B' y de B' a B.
   (c) Si u y v son vectores de $\mathbb{R}^2$ tales que $u_B = (-3,5)$ y $v_{B'} = (0,2)$, halla $u_{B'}$ y v_B.

6. Encuentra una base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

   a) $W_1 = \langle \{(2,-1,0,1)\,;(-2,1,-3,2)\} \rangle$.
   b) $W_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y+z+t=0, y-z=0\right\}$.
   c) $W_3 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-2y+z=0\right\}$.
   d) W_4: $\left\{ \begin{array}{c} x = \lambda+\alpha+\beta \\ y = \lambda-\alpha+3\beta \\ z = \lambda+2\alpha \\ t = 2\lambda+3\alpha+\beta \end{array} \right.$
   e) $W_5 = \langle \{(1,-1,0,1)\,;(2,-1,0,2)\,;(-1,2,0,-1)\} \rangle$.

7. Determina unas ecuaciones implícitas de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$

   $$U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z-t=0, x+2y-z=0\right\} \text{ y } W = \langle \{(1,-1,0,3)\,;(2,1,-1,2)\} \rangle ,$$

   así como también de $U \cap W$ y de $U+W$. Concluye si la suma es directa o no.

Soluciones:

1. $\mu = 0$.

2. **(a)** $r(S_1) = 3$**,** base; **(b)** $r(S_2) = 3$, sistema linealmente independiente, no es una base, no es un sistema generador; **(c)** $r(S_3) = 2$, sistema linealmente dependiente, no es una base, no es un sistema generador **(d)** $r(S_4) = 3$, sistema linealmente dependiente, sistema generador; **(e)** $r(S_5) = 3$; el conjunto es linealmente independiente, pero no es un SG. **(f)** Sistema linealmente dependiente y no es un SG. **(g)** Base (rango 3) **(h)** Para $x \neq 0$, es una base de rango 3 y para $x = 0$ es un sistema linealmente dependiente, no es un SG y el rango es 2.

3. **(a)** Sí; **(b)** No, porque $0 \notin S_2$; **(c)** No, no cumple $u+v \in S_3$ para $u, v \in S_2$; por ejemplo $u = (1,1,0)$ y $v = (0,0,1)$. **(d)** Sí.

4. **(a)** Dibujar directamente los vectores que van desde el origen a cada uno de los elementos del B. **(b)** $v = (-3,4)_B$; **(c)**

   $$M_{B\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; M_{C\to B} = (M_{B\to C})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. **(a)** Dibujar directamente los vectores que van desde el origen a cada uno de los elementos de B y B'. **(b)**

   $$M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; M_{B'\to B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c) $u_{B'} = (7,-2)_{B'}\,; v_B = (-4,2)$.

6.

	Base	Paramétricas	Implícitas
(a)	$\left\{ \begin{array}{c} (2,-1,0,1) \\ (-2,1,-3,2) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} x = 2\alpha - 2\beta \\ y = -\alpha + \beta \\ z = -3\beta \\ t = \alpha + 2\beta \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} x + 3y + z + t = 0 \\ x - 2z - 2t = 0 \end{array} \right\}$
(b)	$\left\{ \begin{array}{c} (1,0,0,-1) \\ (0,1,1,0) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \beta \\ t = -\alpha \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} x - y + z + t = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\}$
(c)	$\left\{ \begin{array}{c} (1,0,-1,0) \\ (0,1,2,0) \\ (0,0,0,1) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 2\beta - \alpha \\ t = \gamma \end{array} \right\}$	$\{x - 2y + z = 0\}$
(d)	$\left\{ \begin{array}{c} (1,-1,2,3) \\ (1,3,0,1) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} x = \lambda + \alpha + \beta \\ y = \lambda - \alpha + 3\beta \\ z = \lambda + 2\alpha \\ t = 2\lambda + 3\alpha + \beta \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} x + z - t = 0 \\ -5x + y + 2z = 0 \end{array} \right\}$
(e)	$\left\{ \begin{array}{c} (1,-1,0,1) \\ (2,-1,0,2) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} x = \alpha + 2\beta \\ y = -\alpha - \beta \\ z = 0 \\ t = \alpha + 2\beta \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} x - t = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$

7.

	Base	Paramétricas	Implícitas
U	$\left\{ \begin{array}{c} (1,0,1,2) \\ (0,1,2,-1) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=\alpha+2\beta \\ t=2\alpha-2\beta \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} x+y+z-t=0 \\ x+2y-z=0 \end{array} \right\}$
W	$\left\{ \begin{array}{c} (1,-1,0,3) \\ (2,1,-1,2) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} x=\alpha+2\beta \\ y=-\alpha+\beta \\ z=-\beta \\ t=3\alpha+2\beta \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} x+y+3z=0 \\ 3x+4z-t=0 \end{array} \right\}$

$U \cap W = \{0\}$, $U \oplus W = \mathbb{R}^4$, ya que es suma directa