1. Se consideran, en $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar euclídeo, los siguientes subespacios:

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{l} x-y-z=0 \\ x-z=0 \end{array} \right. \quad \text{y } W =< (2,0,-1),(0,-4,1) >$$

   a) Obtener una base ortonormal de cada uno de los subespacios.
   b) Obtener una base de $U^{\perp}$ y otra de $W^{\perp}$.
   c) Calcular la proyección ortogonal del vector $v=(3,2,1)$ sobre U y también sobre W.

Solución:

a) Buscamos una base de U

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ \\ x-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ \\ x=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=x-z \\ \\ x=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ \\ x=z \end{array}\right\}$$

Tomando $z=\alpha$, entonces las ecuaciones paramétricas de U son

$$\left.\begin{array}{c} x=\alpha \\ y=0 \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow U = \langle (1,0,1) \rangle$$

siendo $B_U = \{u_1 = (1,0,1)\}$ una base de U , que como está formada por un sólo vector, es ortogonal. Para encontrar una base ortonormal, dividiremos este vector por su norma

$$\|u_1\| = \|(1,0,1)\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$$

y siendo la base ortonormal $B'_U == \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$.
Para encontrar la base ortornomal de W usaremos el método de Gram-Schmidt a partir de la base (comprueba que lo es) $B_W = \{w_1 = (2,0,-1), w_2 = (0,-4,1)\}$. Denominamos a la nueva base $B'_W = \{w'_1, w'_2\}$. Donde los vectores de la base w_1 se obtienen como sigue

$$w'_1 = w_1 = (2,0,-1)$$

mientras que w'_2 se obtiene como

$$w'_2 = w_2 + \alpha_{21} w'_1 = (0,-4,1) + \alpha_{21}(2,0,-1),$$

eligiendo el valor de $\alpha_{21} \in \mathbb{R}$, para que $w'_2 \perp w'_1$, es decir

$$0 = \langle w'_1, w'_2 \rangle = \langle w'_1, w_2 + \alpha_{21} w'_1 \rangle = \langle w'_1, w_2 \rangle + \alpha_{21} \langle w'_1, w'_1 \rangle$$

de donde obtenemos

$$\alpha_{21} = -\frac{\langle w'_1, w_2 \rangle}{\langle w'_1, w'_1 \rangle} = -\frac{\langle (2,0,-1),(0,-4,1) \rangle}{\langle (2,0,-1),(2,0,-1) \rangle} = \frac{1}{5} \Rightarrow w'_2 = \left(\frac{2}{5}, -4, \frac{4}{5} \right)$$

Para encontrar una base ortonormal $B'' == \{w_1'', w_2''\}$ dividiremos cada vector por su norma correspondiente

$$\begin{aligned}\|w_1'\| &= \|(2,0,-1)\| = \sqrt{5} \Rightarrow w_1'' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\\ \|w_2'\| &= \left\|\left(\frac{2}{5}, -4, \frac{4}{5}\right)\right\| = \sqrt{\frac{84}{5}} = 2\sqrt{\frac{21}{5}} \Rightarrow w_2'' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{21}}, -2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{21}}\right)\end{aligned}$$

b) Base de $U^\perp$. Como U está definido mediante ecuaciones implíticas

$$\begin{aligned}U &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y-z=0;\ x-z=0\right\}\\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (1,-1,-1), (x,y,z)\rangle = 0;\ \langle (1,0,-1), (x,y,z)\rangle = 0\right\}\end{aligned}$$

luego

$$B_{U^\perp} = \{u_2 = (1,-1,-1); u_3 = (1,0,-1)\}$$

Base de $W^\perp$. Como tenemos una base de W, obtendremos las ecuaciones implícitas de $W^\perp$

$$\begin{aligned}W^\perp &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (2,0,-1), (x,y,z)\rangle = 0;\ \langle (0,-4,1), (x,y,z)\rangle = 0\right\}\\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-z=0;\ -4y+z=0\right\}\end{aligned}$$

De donde resolviendo el sistema, obtendremos las paramétricas

$$\left.\begin{array}{r}2x-z=0\\ -4y+z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{z}{2}\\ y=\dfrac{z}{4}\end{array}\right\}$$

Tomando $z=\alpha$, entonces las ecuaciones paramétricas de U son

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{\alpha}{2}\\ y=\dfrac{\alpha}{4}\\ z=\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow W^\perp = \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\right)\right\rangle == \langle w_3 = (2,1,4)\rangle$$

c) Proyección ortogonal sobre U, teniendo en cuenta que $v = v_1 + v_2$; con $v_1 \in U$ y $v_2 \in U^\perp$, calculamos $\langle v, u_1\rangle$

$$\langle v, u_1\rangle = \langle v_1 + v_2, u_1\rangle = \langle v_1, u_1\rangle + \langle v_2, u_1\rangle$$

pero como $v_2 \in U^\perp$ y $u_1 \in U$, entonces $\langle v_2, u_1\rangle = 0$, y como por otra parte $v_1 \in U$ entonces $v_1 = \alpha u_1$, obteniéndose

$$\langle v, u_1\rangle = \langle \alpha u_1, u_1\rangle = \alpha \langle u_1, u_1\rangle$$

de donde

$$\alpha = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} = \frac{\langle (3,2,1), (1,0,1)\rangle}{\langle (1,0,1), (1,0,1)\rangle} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow v_1 = 2u_1 = (2,0,2)$$

Para calcular la proyección ortogonal sobre W, tenemos en cuenta que $v = v_1' + v_2'$; con $v_1' \in W$ y $v_2' \in W^\perp$. Como $\dim\left(W^\perp\right) = 1$, lo que haremos para simplificar los cálculos es encontrar el valor de v_2', que es la proyección ortogonal de v sobre $W^\perp$, para ello calculamos $\langle v, w_3\rangle$

$$\langle v, w_3\rangle = \langle v_1' + v_2', w_3\rangle = \langle v_1', w_3\rangle + \langle v_2', w_3\rangle$$

pero como $v_1' \in W$ y $w_3 \in W^\perp$, entonces $\langle v_1', w_3\rangle = 0$, y como por otra parte $v_2' \in W^\perp$ entonces $v_2' = \beta w_3$, obteniéndose

$$\langle v, w_3\rangle = \langle \beta w_3, w_3\rangle = \beta \langle w_3, w_3\rangle$$

de donde

$$\beta=\frac{\langle v,w_3\rangle}{\langle w_3,w_3\rangle}=\frac{\langle(3,2,1)\,,(2,1,4)\rangle}{\langle(2,1,4)\,,(2,1,4)\rangle}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}\Rightarrow v_2'=\frac{4}{7}w_3=\left(\frac{8}{7},\frac{4}{7},\frac{16}{7}\right)$$

que como hemos dicho es la proyección ortogonal sobre $W^{\perp}$, podemos encontrar v_1' la proyección ortogonal sobre W, usando el hecho de que $v=v_1'+v_2'$

$$v=v_1'+v_2'\Leftrightarrow v_1'=v-v_2'=(3,2,1)-\left(\frac{8}{7},\frac{4}{7},\frac{16}{7}\right)=\left(\frac{13}{7},\frac{10}{7},-\frac{9}{7}\right).$$

2. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar

$$\langle(x,y,z)\,;(x',y',z')\rangle_P=2xx'+4yy'+zz'$$

   a) Hallar mediante el método de Gram-Schmidt una base ortonormal del subespacio

$$U=\langle(1,-1,2)\,,(0,3,-2)\rangle$$

   b) Calcular mediante el método de Gram-Schmidt una base ortonormal del subespacio

$$W=\{(x,y,z):x-2y+z=0,3x-2y-z=0\}$$

Solución

a) A partir de la base $B=\{u_1=(1,-1,2)\,;u_2=(0,3,-2)\}$, obtenemos la base ortogonal $B'=\{u_1',u_2'\}$, como sigue

$$u_1'=u_1=(1,-1,2)$$

mientra que para u_2'

$$u_2'=u_2+\alpha_{21}u_1',$$

eligiendo α_{21} de forma que u_2' sea ortogonal a u_1' para el producto escalar indicado:

$$\langle u_1';u_2'\rangle_P=0\Leftrightarrow\langle(1,-1,2)\,;u_2+\alpha_{21}u_1'\rangle_P=0\Leftrightarrow\langle(1,-1,2)\,;u_2\rangle_P+\alpha_{21}\,\langle(1,-1,2)\,;u_1'\rangle_P=0$$

de donde obtenemos el valor de α_{21}

$$\alpha_{21}=-\frac{\langle(1,-1,2)\,;u_2\rangle_P}{\langle(1,-1,2)\,;u_1'\rangle_P}=-\frac{\langle(1,-1,2)\,;(0,3,-2)\rangle_P}{\langle(1,-1,2)\,;(1,-1,2)\rangle_P}=-\frac{2\times1\times0+4\times(-1)\times3+2\times(-2)}{2\times1\times1+4\times(-1)\times(-1)+2\times(2)}=\frac{8}{5}$$

y obtendremos el valor de u_2' sustituyendo en su expresión

$$u_2'=u_2+\alpha_{21}u_1'=(0,3,-2)+\frac{8}{5}\,(1,-1,2)=\left(\frac{8}{5},\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)$$

Para encontrar una base ortornormal, necesitamos conocer la norma asociada a este producto escalar

$$\|(x,y,z)\|_P=\sqrt{\langle(x,y,z)\,;(x,y,z)\rangle_P}=\sqrt{2x^2+4y^2+z^2},$$

por tanto

$$\begin{aligned}\|u_1'\|_P&=\|(1,-1,2)\|_P=\sqrt{2\times1^2+4\times(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{10}\\ \|u_1'\|_P&=\left\|\left(\frac{8}{5},\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)\right\|_P=\sqrt{2\times\left(\frac{8}{5}\right)^2+4\times\left(\frac{7}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{6\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

y la base ortonormal será

$$B''=\left\{\frac{u_1'}{\|u_1'\|_P},\frac{u_2'}{\|u_1'\|_P}\right\}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}}\right);\left(\frac{8}{6\sqrt{2}\sqrt{5}},\frac{7}{6\sqrt{2}\sqrt{5}},\frac{6}{6\sqrt{2}\sqrt{5}}\right)\right\}$$

b) Para encontrar una base ortogonal de W daremos en primer lugar una base utilizando las ecuaciones implícitas

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=0\ (1) \\ \\ 3x-2y-z=0\ (2) \end{array}\right\} (1)+(2) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x-2y+z=0 \\ \\ 4x-4y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x-2x+z=0 \\ \\ x=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x=z \\ \\ x=y \end{array}\right\},$$

Poniendo $z=\alpha$, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{array}{rcl} x & = & \alpha \\ y & = & \alpha \\ z & = & \alpha \end{array}$$

y encontramos una base de W, tomando por ejemplo $\alpha=1$

$$B=\{(1,1,1)\},$$

que como es un único vector también será ortogonal. Para encontrar una base ortornormal, tenemos que dividir por la norma asociada al producto escalar $\langle ; \rangle_P$

$$\|(1,1,1)\|_P=\sqrt{\langle (1,1,1)\,;(1,1,1)\rangle_P}=\sqrt{4+2+1}=\sqrt{7}$$

y la base buscada es

$$B''=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right\}.$$

Como ejercicio adicional, si quisiéramos encontrar una base de $W^\perp$ tendríamos que recurrir a su definición

$$W^\perp=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\langle (x,y,z)\,;w\rangle_P=0;\ \forall u\in W\right\}$$

aunque sólo es necesario que sea ortogonal para los vectores de la base de W (podemos tomar B, B' o B''}

$$W^\perp=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\langle (x,y,z)\,;(1,1,1)\rangle_P=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:2x+4y+z=0\right\}$$

y haciendo el cambio $x=\alpha$, $y=\beta$, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{r} x=\alpha \\ \\ y=\beta \\ \\ z=-2\alpha-4\beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow (\alpha,\beta,-2\alpha-4\beta)=\alpha\,(1,0,-2)+\beta\,(0,1,-4)$$

y la base de $W^\perp$ es

$$B_{W^\perp}=\{(1,0,-2)\,;(0,1,-4)\}.$$

3. En el espacio vectorial $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 se considera el siguiente producto escalar

$$\langle p_1(x),p_2(x)\rangle=\int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx$$

Calcular una base ortonormal del subespacio de $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$

$$S=<x,2+5x-4x^2>$$

Solución: En primer lugar vamos a comprobar que $B=\left\{x,2+5x-4x^2\right\}$ es una base de S, para ello, tenemos que comprobar que son linealmente independientes, así que suponemos que existen coeficientes α y β de $\mathbb{R}$, que cumplen

$$\alpha x+\beta\left(2+5x-4x^2\right)=0\Leftrightarrow \beta 2+(\alpha+5\beta)\,x-4\beta x^2=0$$

e identificando coeficientes

$$\begin{aligned} \beta &= 0 \\ \alpha + 5\beta &= 0 \\ -4\beta &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como única solución $\alpha = \beta = 0$; luego los polinomios son linealmente independientes. Vamos a construir la base ortogonal mediante Gram-Schmidt a partir de la base B. Si llamamos $u_1(x) = x$ y $u_2(x) = 2 + 5x - 4x^2$, los elementos de la base ortorgonal $B' = \{u_1'(x), u_2'(x)\}$ se construyen de forma usual, tomando $u_1'(x) = u_1(x)$

$$u_1'(x) = x$$

y después construímos u_2' como

$$u_2'(x) = u_2(x) + \alpha_{21} u_1'(x)$$

y elegiremos α_{21} de forma que $\langle u_1'(x), u_2'(x)\rangle = 0$

$$\langle u_1'(x), u_2'(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, u_2(x) + \alpha_{21} u_1'(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, u_2(x)\rangle + \alpha_{21}\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha_{21} = -\frac{\langle x, u_2(x)\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

y calculamos cada uno de los valores usando la definición de producto escalar dada

$$\langle x, u_2(x)\rangle = \int_0^1 x u_2(x)\, dx = \int_0^1 x\left(2 + 5x - 4x^2\right) dx = \int_0^1 \left(2x + 5x^2 - 4x^3\right) dx = x^2 + \frac{5x^3}{3} - x^4\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{3}$$

$$\langle x, x\rangle = \int_0^1 (x \cdot x)\, dx = \int_0^1 x^2 dx == \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}$$

por tanto

$$\alpha_{21} = -\frac{5/3}{1/3} = -5$$

y por tanto

$$u_2'(x) = u_2(x) + \alpha_{21} u_1'(x) = \left(2 + 5x - 4x^2\right) - 5(x) = 2 - 4x^2,$$

siendo

$$B' = \left\{x, 2 - 4x^2\right\}$$

la base ortogonal buscada. Para encontrar la base ortonormal, tenemos que calcular la norma de cada uno de los polinomios según el producto escalar indicadp

$$\begin{aligned} \|u_1'(x)\| &= \|x\| = \sqrt{\langle x; x\rangle} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \|u_2'(x)\| &= \left\|2 - 4x^2\right\| = \sqrt{\langle 2 - 4x^2; 2 - 4x^2\rangle} = \sqrt{\int_0^1 \left(2 - 4x^2\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{28}{15}} \end{aligned}$$

De este modo la base ortornormal será

$$B'' = \left\{\sqrt{3}x, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{7}}\left(2 - 4x^2\right)\right\}.$$

4. Matrices ortogonales. Una matriz cuadrada cuyas columnas son vectores ortonormales dos a dos se dice matriz ortogonal. Se pide:

   a) Sea A una matriz ortogonal. Comprueba que $A^T \cdot A = I$. Por tanto, en las matrices ortogonales, traspuesta $=$ inversa.

$b)$ Comprueba que la matriz de rotación en el plano

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

es ortogonal (respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$) y encuentra su inversa. Analiza geométricamente el efecto que se produce al multiplicar A sobre el vector $\vec{i} = (1,0)$ y sobre $\vec{j} = (0,1)$.

$c)$ Comprueba que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

al actuar sobre un vector $\vec{v} = (x,y)$ permuta el orden de las coordenadas x e y. Analiza si se trata de una matriz ortogonal (respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$) y encuentra su inversa.

Solución:

$a)$ Sea $A = (a_{ij})$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

con $\langle A_i, A_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$, donde $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$ es la columna j. Su traspuesta es $A^T = (b_{ij})$ con $b_{ij} = a_{ji}$, es decir,

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

las filas de A^T son las columnas de A, es decir, $\left(A^T\right)^i = A_i$

$$\begin{aligned} A^T \cdot A &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{nk} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left\langle \left(A^T\right)^1 ; A_1 \right\rangle & \cdots & \left\langle \left(A^T\right)^1 ; A_n \right\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \left(A^T\right)^n ; A_1 \right\rangle & \cdots & \left\langle \left(A^T\right)^n ; A_n \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle A_1 ; A_1 \rangle & \cdots & \langle A_1 ; A_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle A_n ; A_1 \rangle & \cdots & \langle A_n ; A_n \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que por ser las columnas de A ortornormales entre sí

$$\langle A_i, A_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = j \\ 0 & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

como se quería demostrar.

$b)$ Las columnas de la matriz A son

$$\begin{aligned} A_1 &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ A_2 &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned} \langle A_1, A_1\rangle &= \langle(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,;(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\rangle = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \\ \langle A_1, A_2\rangle &= \langle A_2, A_1\rangle = \langle(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,;(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\rangle = -\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \\ \langle A_2, A_2\rangle &= \langle(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,;(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\rangle = (-\operatorname{sen}\theta)(-\operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \end{aligned}$$

Luego son ortogonales dos a dos. De modo que

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos A por los vectores de la base canónica $\vec{i} = (1,0)$ y $\vec{j} = (0,1)$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

se obtienen los vectores al girar θ grados en sentido directo el vector unitario.

$c)$ Si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Se trata de una matriz ortogonal, puesto que si $A_1 = (0,1)$ y $A_2 = (1,0)$ son sus columnas, entonces

$$\begin{aligned} \langle A_1; A_1\rangle &= \langle(0,1)\,;(0,1)\rangle = \sqrt{0^2+1^2} = 1 \\ \langle A_1; A_2\rangle &= \langle(0,1)\,;(1,0)\rangle = 0 \\ \langle A_2; A_2\rangle &= \langle(1,0)\,;(1,0)\rangle = \sqrt{1^2+0^2} = 1 \end{aligned}$$

y por tanto

$$A^{-1} = A^T = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot A^T = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. *(Fuerza y Trabajo).* Supongamos que una partícula se desplaza desde la posición $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ por acción de una fuerza $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Se define el trabajo ejercido por $\vec{F}$ produciendo un desplazamiento $\vec{d} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ como

$$W = \left\langle \vec{F};\ \vec{d} \right\rangle = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

Supongamos que $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ y que $\vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Se pide:

a) Calcula el trabajo W.

b) Calcula la proyección de la fuerza $\vec{F}$ sobre el subespacio generado por $\vec{d}$, es decir, la componente de la fuerza en dirección del desplazamiento.

c) Calcula la componente normal de la fuerza, es decir, la proyección de $\vec{F}$ sobre el subespacio ortogonal a $\vec{d}$.

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} = (3,2,0) \\ \\ \vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j} = (2,-1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow W = \left\langle \vec{F};\ \vec{d} \right\rangle = \langle (3,2,0)\,;\ \ (2,-1,0) \rangle = 6 - 2 + 0 = 4.$$

b) Sea

$$V = \left\langle\ \vec{d}\ \right\rangle = \langle (2,-1,0) \rangle$$

de modo que

$$\mathbb{R}^3 = V \oplus V^\perp$$

Como $\vec{F} = (3,2,0) \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{F} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2;\ \overrightarrow{v}_1 \in V;\ \overrightarrow{v}_2 \in V^\perp$$

además

$$\overrightarrow{v}_1 \in V \Rightarrow \overrightarrow{v}_1 = \lambda \vec{d} = \lambda\,(2,-1,0)\,; \alpha \in \mathbb{R}$$

De este modo

$$\left\langle \vec{F}; \vec{d} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2; \vec{d} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{v}_1;\ \vec{d} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{v}_2;\ \vec{d} \right\rangle = \lambda \left\langle \vec{d};\ \vec{d} \right\rangle$$

puesto que $\overrightarrow{v}_2 \in V^\perp$ y por tanto $\left\langle \overrightarrow{v}_2;\ \vec{d} \right\rangle = 0$. Sustituyendo los valores

$$\left\langle \vec{F}; \vec{d} \right\rangle = \lambda \left\langle \vec{d};\ \vec{d} \right\rangle \Leftrightarrow \langle (3,2,0)\,; (2,-1,0) \rangle = \lambda \,\langle (2,-1,0)\,;\ \ (2,-1,0) \rangle \Leftrightarrow 4 = \lambda 5 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{5}$$

siendo

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{4}{5}\,(2,-1,0) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$$

c) En este caso nos piden el valor de $\overrightarrow{v}_2$

$$\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{v}_1 = (3,2,0) - \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right) = \left(\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, 0\right).$$

También es posible realizar el cálculo directamente, buscando una base de $V^\perp$ cuyas ecuaciones implícitas podemos conocer fácilmente:

$$V^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z)\,; (2,-1,0) = 0 \rangle\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0\right\}$$

o en forma paramétrica, tomando $x = \alpha$ y $z = \beta$,

$$(x,y,z) = (\alpha, 2\alpha, \beta) = \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,0,1)$$

para finalmente obtener la base buscad

$$V^\perp = \langle \{\overrightarrow{u}_1 = (1,2,0)\,; \overrightarrow{u}_2 = (0,0,1)\} \rangle$$

y por tanto

$$\overrightarrow{v}_2 = \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,0,1)$$

Encontraremos α y β multiplicando escalarmente $\overrightarrow{F}$ por los vectores de la base

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{F}; \overrightarrow{u}_1 \right\rangle &= \langle \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_1 \rangle = \langle \overrightarrow{v}_1; \overrightarrow{u}_1 \rangle + \langle \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_1 \rangle = \langle \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_1 \rangle \\
\left\langle \vec{F}; \overrightarrow{u}_2 \right\rangle &= \langle \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_2 \rangle = \langle \overrightarrow{v}_1; \overrightarrow{u}_2 \rangle + \langle \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_2 \rangle = \langle \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_2 \rangle
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\langle \overrightarrow{v}_1; \overrightarrow{u}_1 \rangle = \langle \overrightarrow{v}_1; \overrightarrow{u}_2 \rangle = 0$, por estar los primeros vectores en V y los segundos en $V^{\perp}$. Sustituyendo los valores de los vectores

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{F}; \overrightarrow{u}_1 \right\rangle &= \langle \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_1 \rangle \Longleftrightarrow \langle (3,2,0)\,; (1,2,0) \rangle = \langle \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,0,1)\,; (1,2,0) \rangle \\
&\Longleftrightarrow 7 = \alpha\,\langle (1,2,0)\,; (1,2,0) \rangle + \beta\,\langle (0,0,1)\,; (1,2,0) \rangle \\
&\Longleftrightarrow 7 = 5\alpha \\
\left\langle \vec{F}; \overrightarrow{u}_2 \right\rangle &= \langle \overrightarrow{v}_2; \overrightarrow{u}_2 \rangle \Longleftrightarrow \langle (3,2,0)\,; (0,0,1) \rangle = \langle \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,0,1)\,; (0,0,1) \rangle \\
&\Longleftrightarrow 0 = \alpha\,\langle (1,2,0)\,; (0,0,1) \rangle + \beta\,\langle (0,0,1)\,; (0,0,1) \rangle \\
&\Longleftrightarrow 0 = \beta
\end{aligned}$$

de modo que $\alpha = \frac{7}{5}$ y $\beta = 0$

$$v_2 = \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,0,1) = \frac{7}{5}\,(1,2,0) + 0\,(0,0,1) = \left(\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, 0\right),$$

como era de esperar.

6. Se considera el espacio de funciones

$$\mathcal{L}^2\left([-\pi,\pi]\,;\mathbb{R}\right) = \left\{ f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx < \infty \right\}.$$

Se pide:

a) Comprueba que el sistema de vectores

$$\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \cdots, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx), \cdots\}. \tag{1}$$

es un sistema ortogonal respecto al producto escalar

$$< f, g >_{\mathcal{L}^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx, \quad f, g \in \mathcal{L}^2\left([-\pi,\pi]\,;\mathbb{R}\right).$$

Indicación: Usar las fórmulas trigonométricas siguientes:

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta).$$

b) Dada una función $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$, a las coordenadas de f en el sistema (1) se les llama coeficientes de Fourier, es decir,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)).$$

El término de la derecha en la igualdad anterior se llama serie de Fourier de f. Hay una diferencia importante en la combinación lineal anterior: la suma tiene infinitos términos, pero este asunto será tratado Matemáticas II. Comprueba que los coeficientes de Fourier a_n y b_n están dados por las fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx, \quad n \geq 1$$

c) Calcula los coeficientes de Fourier en $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = |x|$.

Solución:

a) Hay que comprobar que si $f, g \in \{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \cdots, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx), \cdots\}$, entonces

$$\langle f, g\rangle = 0;\ \forall f \neq g.$$

Distinguimos los siguientes casos para $m, n \in \mathbb{N}$

	$f(x)$	$g(x)$	
i)	1	$\cos mx$	$m \neq 0$
ii)	1	$\operatorname{sen} mx$	$m \neq 0$
iii)	$\cos nx$	$\cos mx$	$m \neq n$
iv)	$\operatorname{sen} nx$	$\operatorname{sen} mx$	$m \neq n$
v)	$\cos nx$	$\operatorname{sen} mx$	

1)

$$\langle f;\ g\rangle = \langle 1;\ \cos mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\operatorname{sen}(mx)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{m}(\operatorname{sen}(m\pi) - \operatorname{sen}(-m\pi)) = \frac{1}{m}(0-0) = 0$$

2)

$$\langle f;\ g\rangle = \langle 1;\ \operatorname{sen} mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx\,dx = -\frac{1}{m}\cos(mx)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{m}(\cos(-m\pi) - \cos(m\pi)) = \frac{1}{m}(-1-(-1)) = 0$$

3)

$$\begin{aligned}
\langle f;\ g\rangle &= \langle \cos nx;\ \cos mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(m+n)}\operatorname{sen}(m+n)x + \frac{1}{(m-n)}\operatorname{sen}(m-n)x\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{(m+n)}\operatorname{sen}(m+n)\pi + \frac{1}{(m-n)}\operatorname{sen}(m-n)\pi\right) - \left(\frac{1}{(m+n)}\operatorname{sen}(m+n)(-\pi) + \frac{1}{(m-n)}\operatorname{sen}\right.\right. \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{(m+n)}0 + \frac{1}{(m-n)}0\right) - \left(\frac{1}{(m+n)}0 + \frac{1}{(m-n)}0\right)\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

4)

$$
\begin{aligned}
\langle f;\ g\rangle &= \langle \operatorname{sen} nx;\ \ \operatorname{sen} mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left\{ -\frac{1}{(m+n)} \operatorname{sen}(m+n)\,x + \frac{1}{(m-n)} \operatorname{sen}(m-n)\,x \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \left(-\frac{1}{(m+n)} \operatorname{sen}(m+n)\,\pi + \frac{1}{(m-n)} \operatorname{sen}(m-n)\,\pi \right) - \left(-\frac{1}{(m+n)} \operatorname{sen}(m+n)\,(-\pi) + \frac{1}{(m-n)} \right.\right. \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \left(-\frac{1}{(m+n)} 0 + \frac{1}{(m-n)} 0 \right) - \left(-\frac{1}{(m+n)} 0 + \frac{1}{(m-n)} 0 \right) \right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

5)

$$
\langle f;\ g\rangle = \langle \cos nx;\ \ \operatorname{sen} mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x\right]\, dx
$$

Si $m \neq n$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x\right]\, dx &= \frac{1}{2}\left\{ -\frac{1}{(m+n)} \cos(m+n)\,x - \frac{1}{(m-n)} \cos(m-n)\,x \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \left(-\frac{1}{(m+n)} \cos(m+n)\,\pi + \frac{1}{(m-n)} \cos(m-n)\,\pi \right) - \left(-\frac{1}{(m+} \right.\right. \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \left(-\frac{1}{(m+n)} (-1)^{m+n} + \frac{1}{(m-n)} (-1)^{m-n} \right) - \left(-\frac{1}{(m+n)} (-1) \right.\right. \\
&= \frac{1}{2}\left\{ -\frac{1}{(m+n)} (-1)^{m+n} + \frac{1}{(m-n)} (-1)^{m-n} + \frac{1}{(m+n)} (-1)^{m+n} - \right. \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Si $m = n$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\operatorname{sen}(m+n)\,x + \operatorname{sen}(m-n)\,x\right]\, dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\operatorname{sen}(2m)\,x + \operatorname{sen}(0x)\right]\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(2m)x dx \\
&= \frac{1}{2}\left\{ -\frac{1}{2m} \cos(2m)\,x \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \left(-\frac{1}{2m} \cos(2m)\,\pi \right) - \left(-\frac{1}{2m} \cos(2m)\,(-\pi) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \left(-\frac{1}{2m} \right) - \left(-\frac{1}{2m} \right) \right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Nos queda por comprobar los casos en los que $f(x) = g(x)$. Si $f(x) = g(x) = \cos nx$

$$\begin{aligned}
\langle f;\ g\rangle &= \langle \cos nx;\ \cos nx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(2nx))\, dx = \frac{1}{2}\ x + \frac{1}{2n}\operatorname{sen} 2nx\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\pi + \frac{1}{2n}\operatorname{sen}(2n\pi)\right) - \left(-\pi + \frac{1}{2n}\operatorname{sen}(-2n\pi)\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{(\pi+0) - (-\pi+0)\} = \pi
\end{aligned}$$

Mientras que si $f(x) = g(x) = \operatorname{sen} mx$

$$\begin{aligned}
\langle f;\ g\rangle &= \langle \operatorname{sen} nx;\ \operatorname{sen} nx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos(2nx))\, dx = \frac{1}{2}\ x - \frac{1}{2n}\operatorname{sen} 2nx\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\pi - \frac{1}{2n}\operatorname{sen}(2n\pi)\right) - \left(-\pi - \frac{1}{2n}\operatorname{sen}(-2n\pi)\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{(\pi+0) - (-\pi+0)\} = \pi
\end{aligned}$$

Finalmente si $f(x) = g(x) = 1$

$$\langle f;\ g\rangle = \langle 1;\ 1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = x|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 2\pi$$

$b)$ Usando propiedad de bilinealidad

$$\langle f(x);1\rangle = \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx));1\right\rangle = \frac{a_0}{2}\langle 1;1\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \cos(nx);1\rangle + b_n \langle \operatorname{sen}(nx);1\rangle = \frac{a_0}{2} 2\pi = \pi a_0$$

de donde por los apartados (i) y (ii):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\langle f(x);1\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

Para calcular los a_m, multiplicamos por $\cos mx$

$$\begin{aligned}
\langle f(x);\cos mx\rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx));\cos mx\right\rangle = \frac{a_0}{2}\langle 1;\cos mx\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \cos(nx);\cos mx\rangle + b_n \\
&= a_m \pi
\end{aligned}$$

de donde por los apartados (i), (iii) y (v)

$$a_m = \frac{1}{\pi}\langle f(x);\cos mx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\, dx$$

Para calcular los b_m, multiplicamos por $\operatorname{sen} mx$

$$\begin{aligned}
\langle f(x);\operatorname{sen} mx\rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx));\operatorname{sen} mx\right\rangle = \frac{a_0}{2}\langle 1;\operatorname{sen} mx\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \cos(nx);\operatorname{sen} mx\rangle + b_n \\
&= b_m \pi
\end{aligned}$$

de donde por los apartados (i), (iv) y (v)

$$b_m = \frac{1}{\pi}\left\langle f(x); \operatorname{sen} mx \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(mx)\, dx$$

c) Si $f(x) = x$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0 \\ a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(mx)\, dx = 0 \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(mx)\, dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Si $f(x) = |x|$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-x)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \pi \\ a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(mx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\cos(mx)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(mx)\, dx = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \operatorname{sen}(mx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x \operatorname{sen}(mx)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen}(mx)\, dx = 0 \end{aligned}$$