

1. Se consideran en \mathbb{R}^3 , junto con el producto escalar euclídeo, los siguientes subespacios:

$$U \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \text{y } W = \langle \{(2, 0, -1); (0, -4, 1)\} \rangle$$

- Encuentra una base ortonormal de cada uno de los subespacios.
- Encuentra una base de U^\perp y otra de W^\perp .
- Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (3, 2, 1)$ sobre U y también sobre W .

Solución:

a) Buscamos una base de U

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - z \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

Tomando $z = \alpha$, obtenemos las ecuaciones paramétricas de U

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow (\alpha, 0, \alpha),$$

y como base de U

$$B_U = \{u_1 = (1, 0, 1)\}.$$

Como B_U está formada por un sólo vector, es una base ortogonal. Para encontrar una base ortonormal, dividiremos este vector por su norma

$$\|u_1\| = \|(1, 0, 1)\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

La base ortonormal es

$$B'_U = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Los vectores $w_1 = (2, 0, -1)$ y $w_2 = (0, -4, 1)$, son linealmente independientes puesto que sus coordenadas no son proporcionales, por tanto tendremos una base de W

$$B_W = \{w_1 = (2, 0, -1), w_2 = (0, -4, 1)\}.$$

Para encontrar una base ortornomal $B'_W = \{w'_1, w'_2\}$ de W , usamos el método de Gram-Schmidt. Con este método

$$w'_1 = w_1 = (2, 0, -1),$$

mientras que w'_2 se obtiene como

$$w'_2 = w_2 + \alpha_{21}w'_1 = (0, -4, 1) + \alpha_{21}(2, 0, -1),$$

eligiendo el valor de $\alpha_{21} \in \mathbb{R}$ para que $w'_2 \perp w'_1$, es decir

$$0 = \langle w'_1, w'_2 \rangle \Rightarrow 0 = \langle w'_1, w_2 + \alpha_{21} w'_1 \rangle$$

y por bilinealidad

$$0 = \langle w'_1, w_2 + \alpha_{21} w'_1 \rangle = \langle w'_1, w_2 \rangle + \alpha_{21} \langle w'_1, w'_1 \rangle,$$

de donde se obtiene

$$\alpha_{21} = -\frac{\langle w'_1, w_2 \rangle}{\langle w'_1, w'_1 \rangle} = -\frac{\langle (2, 0, -1), (0, -4, 1) \rangle}{\langle (2, 0, -1), (2, 0, -1) \rangle} = \frac{1}{5} \Rightarrow w'_2 = \left(\frac{2}{5}, -4, \frac{4}{5} \right).$$

Tomaremos como base ortogonal

$$B'_W = \{(2, 0, -1), (2, -20, 4)\}$$

tomando como vector de la base el vector $5w'_2$.

Para encontrar la base ortonormal $B'' = \{w''_1, w''_2\}$ se dividirá cada vector por su norma correspondiente

$$\|w'_1\| = \|(2, 0, -1)\| = \sqrt{5} \Rightarrow w''_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\|w'_2\| = \|(2, -20, 4)\| = \sqrt{420} = 2\sqrt{105} \Rightarrow w''_2 = \left(\frac{2}{2\sqrt{105}}, -\frac{20}{2\sqrt{105}}, \frac{4}{2\sqrt{105}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{105}}, -\frac{10}{\sqrt{105}}, \frac{2}{\sqrt{105}} \right)$$

b) Para obtener un base de U^\perp , utilizaremos que U está definido mediante ecuaciones implícitas

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0; x - z = 0\}$$

y usando el producto escalar

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (1, -1, -1), (x, y, z) \rangle = 0; \langle (1, 0, -1), (x, y, z) \rangle = 0\}$$

y obtenemos una base de U^\perp

$$B_{U^\perp} = \{u_2 = (1, -1, -1); u_3 = (1, 0, -1)\}$$

Para obtener una base de W^\perp , usamos la base de W , para obtener las ecuaciones implícitas de W^\perp

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (2, 0, -1), (x, y, z) \rangle = 0; \langle (0, -4, 1), (x, y, z) \rangle = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - z = 0; -4y + z = 0\} \end{aligned}$$

De donde, resolviendo el sistema, obtendremos las paramétricas

$$\left. \begin{array}{l} 2x - z = 0 \\ -4y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{z}{2} \\ y = \frac{z}{4} \end{array} \right\}$$

Tomando $z = \alpha$, las ecuaciones paramétricas de U serán

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\alpha}{2} \\ y = \frac{\alpha}{4} \\ z = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow W^\perp = \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1 \right) \right\rangle = \langle (2, 1, 4) \rangle$$

con

$$w_3 = (2, 1, 4).$$

- c) Proyección ortogonal sobre U , teniendo en cuenta que $v = v_1 + v_2$; con $v_1 \in U$ y $v_2 \in U^\perp$, calculamos $\langle v, u_1 \rangle$

$$\langle v, u_1 \rangle = \langle v_1 + v_2, u_1 \rangle = \langle v_1, u_1 \rangle + \langle v_2, u_1 \rangle$$

como

$$\left. \begin{array}{l} v_2 \in U^\perp \\ u_1 \in U \end{array} \right\} \Rightarrow \langle v_2, u_1 \rangle = 0,$$

de donde

$$\langle v, u_1 \rangle = \langle v_1, u_1 \rangle.$$

Como $v_1 \in U = \langle u_1 \rangle \Rightarrow v_1 = \alpha u_1$, por tanto

$$\langle v, u_1 \rangle = \langle \alpha u_1, u_1 \rangle = \alpha \langle u_1, u_1 \rangle$$

y despejando α

$$\alpha = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = \frac{\langle (3, 2, 1), (1, 0, 1) \rangle}{\langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow v_1 = 2u_1 = (2, 0, 2).$$

Para calcular la proyección ortogonal sobre W , usando $v = v'_1 + v'_2$; con $v'_1 \in W$ y $v'_2 \in W^\perp$. Como $\dim(W^\perp) = 1$, lo que haremos para simplificar los cálculos es encontrar el valor de v'_2 , que es la proyección ortogonal de v sobre W^\perp , para ello, calculamos $\langle v, w_3 \rangle$

$$\langle v, w_3 \rangle = \langle v'_1 + v'_2, w_3 \rangle = \langle v'_1, w_3 \rangle + \langle v'_2, w_3 \rangle$$

como $v'_1 \in W$ y $w_3 \in W^\perp$, entonces $\langle v'_1, w_3 \rangle = 0$, y como $v'_2 \in W^\perp$ entonces $v'_2 = \beta w_3$, obteniéndose

$$\langle v, w_3 \rangle = \langle \beta w_3, w_3 \rangle = \beta \langle w_3, w_3 \rangle$$

y despejando β

$$\beta = \frac{\langle v, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} = \frac{\langle (3, 2, 1), (2, 1, 4) \rangle}{\langle (2, 1, 4), (2, 1, 4) \rangle} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \Rightarrow v'_2 = \frac{4}{7} w_3 = \left(\frac{8}{7}, \frac{4}{7}, \frac{16}{7} \right)$$

El vector v'_2 es la proyección ortogonal sobre W^\perp , pero podemos encontrar v'_1 la proyección ortogonal sobre W , usando el hecho de que $v = v'_1 + v'_2$

$$v = v'_1 + v'_2 \Leftrightarrow v'_1 = v - v'_2 = (3, 2, 1) - \left(\frac{8}{7}, \frac{4}{7}, \frac{16}{7} \right) = \left(\frac{13}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{9}{7} \right).$$

2. Considera \mathbb{R}^3 junto con el producto escalar

$$\langle (x, y, z); (x', y', z') \rangle_P = 2xx' + 4yy' + zz'$$

- a) Encuentra mediante el método de Gram-Schmidt una base ortonormal del subespacio

$$U = \langle (1, -1, 2), (0, 3, -2) \rangle$$

- b) Calcular mediante el método de Gram-Schmidt una base ortonormal del subespacio

$$W = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0, 3x - 2y - z = 0\}$$

Solución

- a) El sistema $B = \{u_1 = (1, -1, 2); u_2 = (0, 3, -2)\}$, es un sistema linealmente independiente, puesto que los coeficientes no son proporcionales y por tanto forman una base de U . Para obtener una base ortogonal de U , $B' = \{u'_1, u'_2\}$, usamos el método de Gram-Schmidt. Definiremos u'_1 como

$$u'_1 = u_1 = (1, -1, 2),$$

mientras que para u'_2 estará definido de la forma

$$u'_2 = u_2 + \alpha_{21}u'_1,$$

eligiendo α_{21} de forma que u'_2 sea ortogonal a u'_1 , usando el producto escalar $\langle \rangle_P$, esto es

$$\langle u'_1; u'_2 \rangle_P = 0 \Leftrightarrow \langle (1, -1, 2); u_2 + \alpha_{21}u'_1 \rangle_P = 0 \Leftrightarrow \langle (1, -1, 2); u_2 \rangle_P + \alpha_{21} \langle (1, -1, 2); u'_1 \rangle_P = 0$$

de donde obtenemos el valor de α_{21}

$$\alpha_{21} = -\frac{\langle (1, -1, 2); u_2 \rangle_P}{\langle (1, -1, 2); u'_1 \rangle_P} = -\frac{\langle (1, -1, 2); (0, 3, -2) \rangle_P}{\langle (1, -1, 2); (1, -1, 2) \rangle_P} = -\frac{2 \cdot (1 \cdot 0) + 4 \cdot ((-1) \cdot 3) + (2 \cdot (-2))}{2 \cdot (1 \cdot 1) + 4 \cdot ((-1) \cdot (-1)) + (2 \cdot 2)} = \frac{8}{5}.$$

Y u'_2

$$u'_2 = u_2 + \alpha_{21}u'_1 = (0, 3, -2) + \frac{8}{5}(1, -1, 2) = \left(\frac{8}{5}, \frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

Por simplicidad multiplicamos este vector por 5 y una base ortogonal será

$$B' = \{(1, -1, 2); (8, 7, 6)\}.$$

Para encontrar una base ortornormal, necesitamos conocer la norma asociada a este producto escalar

$$\|(x, y, z)\|_P = \sqrt{\langle (x, y, z); (x, y, z) \rangle_P} = \sqrt{2x^2 + 4y^2 + z^2},$$

por tanto

$$\|u'_1\|_P = \|(1, -1, 2)\|_P = \sqrt{2 \cdot (1)^2 + 4 \cdot (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{10}$$

$$\|u'_2\|_P = \|(8, 7, 6)\|_P = \sqrt{2 \cdot (8)^2 + 4 \cdot (7)^2 + (6)^2} = 6\sqrt{2}\sqrt{5}$$

y la base ortónormal será

$$B'' = \left\{ \frac{u'_1}{\|u'_1\|_P}, \frac{u'_2}{\|u'_2\|_P} \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}} \right); \left(\frac{8}{6\sqrt{2}\sqrt{5}}, \frac{7}{6\sqrt{2}\sqrt{5}}, \frac{6}{6\sqrt{2}\sqrt{5}} \right) \right\}.$$

- b) Obtenemos una base de W usando sus ecuaciones implícitas:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \quad (1) \\ 3x - 2y - z = 0 \quad (2) \end{array} \right\} (1)+(2) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2x + z = 0 \\ x = y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = z \\ x = y \end{array} \right\},$$

Tomando $z = \alpha$, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\left. \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha, \alpha, \alpha)$$

de forma que una base de W es

$$B = \{(1, 1, 1)\},$$

que como es un único vector también será ortogonal. Para encontrar una base ortonormal, tenemos que dividir por su norma, obtenida usando el producto escalar $\langle ; \rangle_P$

$$\|(1, 1, 1)\|_P = \sqrt{\langle (1, 1, 1); (1, 1, 1) \rangle_P} = \sqrt{4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 1^2} = \sqrt{7}.$$

Y la base ortonormal es

$$B'' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}} \right) \right\}.$$

Como ejercicio adicional, supongamos que queremos encontrar una base de W^\perp , para ello recurrimos a su definición

$$W^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z); w \rangle_P = 0; \forall u \in W\}.$$

Sólo es necesario que sea ortogonal para los vectores de una base de W (podríamos tomar B, B' o B''):

$$W^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z); (1, 1, 1) \rangle_P = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 4y + z = 0\}$$

Haciendo el cambio $x = \alpha, y = \beta$, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\left. \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -2\alpha - 4\beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\alpha, \beta, -2\alpha - 4\beta) = \alpha(1, 0, -2) + \beta(0, 1, -4)$$

de donde obtenemos la base de W^\perp

$$B_{W^\perp} = \{(1, 0, -2); (0, 1, -4)\}.$$

También hubiera sido posible encontrar una base recurriendo a las ecuaciones implícitas de W

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Podemos expresar estas ecuaciones como

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \Leftrightarrow 2 \left(x \cdot \frac{1}{2} \right) + 4 \left(y \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right) + z \cdot 1 = 0 \\ 3x - 2y - z &= 0 \Leftrightarrow 2 \left(x \cdot \frac{3}{2} \right) + 4 \left(y \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right) + z \cdot (-1) = 0 \end{aligned}$$

O usando el producto escalar $\langle ; \rangle_P$

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \Leftrightarrow \left\langle (x, y, z); \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \right\rangle_P = 0 \\ 3x - 2y - z &= 0 \Leftrightarrow \left\langle (x, y, z); \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1 \right) \right\rangle_P = 0 \end{aligned}$$

que nos proporciona la base de W^\perp

$$B_{W^\perp} = \{(1, -1, 2); (3, -1, -2)\}$$

que aunque no sea la misma que la obtenida con el proceso anterior, genera el mismo espacio vectorial ya que

$$\begin{aligned} (1, 0, -2) &= -\frac{1}{2}(1, -1, 2) + \frac{1}{2}(3, -1, -2); \\ (0, 1, -4) &= -\frac{3}{2}(1, -1, 2) + \frac{1}{2}(3, -1, -2). \end{aligned}$$

3. En el espacio vectorial $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 se considera el siguiente producto escalar

$$\langle p_1(x), p_2(x) \rangle = \int_0^1 p_1(x) p_2(x) dx$$

Calcular una base ortonormal del subespacio de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$

$$S = \langle x, 2 + 5x - 4x^2 \rangle$$

Solución: En primer lugar vamos a comprobar que $B = \{x, 2 + 5x - 4x^2\}$ es una base de S ; para ello, tenemos que comprobar que son linealmente independientes, así que si suponemos que existen coeficientes α y β de \mathbb{R} , que cumplen

$$\alpha x + \beta(2 + 5x - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow \beta 2 + (\alpha + 5\beta)x - 4\beta x^2 = 0,$$

e identificando coeficientes

$$\begin{aligned} \beta &= 0 \\ \alpha + 5\beta &= 0 \\ -4\beta &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como única solución $\alpha = \beta = 0$; luego los dos polinomios son linealmente independientes. Vamos a construir la base ortogonal mediante Gram-Schmidt a partir de B . Si llamamos $u_1(x) = x$ y $u_2(x) = 2 + 5x - 4x^2$, los elementos de la base ortogonal $B' = \{v_1(x), v_2(x)\}$ se construyen de forma usual, tomando $v_1(x) = u_1(x)$

$$v_1(x) = x$$

y después construyendo $v_2(x)$ como

$$v_2(x) = u_2(x) + \alpha_{21}v_1(x),$$

siendo $\alpha_{21} \in \mathbb{R}$, de forma que $\langle v_1(x), v_2(x) \rangle = 0$

$$\langle v_1(x), v_2(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, u_2(x) + \alpha_{21}v_1(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, u_2(x) \rangle + \alpha_{21} \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha_{21} = -\frac{\langle x, u_2(x) \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

y calculamos cada uno de los valores usando la definición de producto escalar dada en el enunciado

$$\langle x, u_2(x) \rangle = \int_0^1 x u_2(x) dx = \int_0^1 x(2 + 5x - 4x^2) dx = \int_0^1 (2x + 5x^2 - 4x^3) dx = x^2 + \frac{5x^3}{3} - x^4 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{3}$$

$$\langle x, x \rangle = \int_0^1 (x \cdot x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3},$$

y

$$\alpha_{21} = -\frac{5/3}{1/3} = -5,$$

y por tanto

$$v_2(x) = u_2(x) + \alpha_{21}v_1(x) = (2 + 5x - 4x^2) - 5(x) = 2 - 4x^2,$$

siendo

$$B' = \{x, 2 - 4x^2\}$$

la base ortogonal buscada. Para encontrar la base ortonormal, tenemos que calcular la norma de cada uno de los polinomios, siempre según el producto escalar asociado

$$\|v_1(x)\| = \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\|u'_2(x)\| = \|2 - 4x^2\| = \sqrt{\langle 2 - 4x^2, 2 - 4x^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (2 - 4x^2)^2 dx} = \sqrt{\frac{28}{15}}$$

De este modo la base ortonormal será

$$B'' = \left\{ \sqrt{3}x, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{7}}(2 - 4x^2) \right\}.$$

4. **Matrices ortogonales.** Una matriz cuyas columnas son vectores ortonormales dos a dos se dice matriz ortogonal. Se pide:

- a) Sea A una matriz ortogonal. Comprueba que $A^T \cdot A = I$. Por tanto, en las matrices ortogonales, traspuesta = inversa.
 b) Comprueba que la matriz de rotación en el plano

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

es ortogonal (respecto al producto escalar usual de \mathbb{R}^2) y encuentra su inversa. Analiza geoméricamente el efecto que se produce al multiplicar A sobre el vector $\vec{i} = (1, 0)$ y sobre $\vec{j} = (0, 1)$.

- c) Comprueba que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

al actuar sobre un vector $\vec{v} = (x, y)$ permuta el orden de las coordenadas x e y . Analiza si se trata de una matriz ortogonal (respecto al producto escalar usual de \mathbb{R}^2) y encuentra su inversa.

Solución:

- a) Sea $A = (a_{ij})$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

con $\langle A_i, A_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$, donde $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$ es la columna i . Su traspuesta es $A^T = (b_{ij})$ con

$b_{ij} = a_{ji}$, es decir,

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

las filas de A^T son las columnas de A , es decir, $(A^T)^i = A_i$

$$\begin{aligned} A^T \cdot A &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} a_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k} a_{nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} a_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk} a_{nk} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle (A^T)^1; A_1 \rangle & \cdots & \langle (A^T)^1; A_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle (A^T)^n; A_1 \rangle & \cdots & \langle (A^T)^n; A_n \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle A_1; A_1 \rangle & \cdots & \langle A_1; A_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle A_n; A_1 \rangle & \cdots & \langle A_n; A_n \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que por ser las columnas de A ortonormales entre sí

$$\langle A_i, A_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = j \\ 0 & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

como se quería demostrar.

b) Las columnas de la matriz A son

$$A_1 = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$$

$$A_2 = (-\text{sen } \theta, \cos \theta)$$

de forma que

$$\langle A_1, A_1 \rangle = \langle (\cos \theta, \text{sen } \theta); (\cos \theta, \text{sen } \theta) \rangle = \cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$$

$$\langle A_1, A_2 \rangle = \langle A_2, A_1 \rangle = \langle (\cos \theta, \text{sen } \theta); (-\text{sen } \theta, \cos \theta) \rangle = -\cos \theta \text{sen } \theta + \text{sen } \theta \cos \theta = 0$$

$$\langle A_2, A_2 \rangle = \langle (-\text{sen } \theta, \cos \theta); (-\text{sen } \theta, \cos \theta) \rangle = (-\text{sen } \theta)(-\text{sen } \theta) + \cos^2 \theta = \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Luego son ortogonales dos a dos. De modo que

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos A por los vectores de la base canónica $\vec{i} = (1, 0)$ y $\vec{j} = (0, 1)$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen } \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

se obtienen los vectores al girar θ grados en sentido directo el vector unitario.

c) Si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Se trata de una matriz ortogonal, puesto que si $A_1 = (0, 1)$ y $A_2 = (1, 0)$ son sus columnas, entonces

$$\langle A_1; A_1 \rangle = \langle (0, 1); (0, 1) \rangle = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$\langle A_1; A_2 \rangle = \langle (0, 1); (1, 0) \rangle = 0$$

$$\langle A_2; A_2 \rangle = \langle (1, 0); (1, 0) \rangle = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

y por tanto

$$A^{-1} = A^T = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot A^T = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (Fuerza y Trabajo). Supongamos que una partícula se desplaza desde la posición $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ por acción de una fuerza $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Se define el trabajo ejercido por \vec{F} produciendo un desplazamiento $\vec{d} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ como

$$W = \langle \vec{F}; \vec{d} \rangle = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

Supongamos que $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ y que $\vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Se pide:

- Calcula el trabajo W .
- Calcula la proyección de la fuerza \vec{F} sobre el subespacio generado por \vec{d} , es decir, la componente de la fuerza en dirección del desplazamiento.
- Calcula la componente normal de la fuerza, es decir, la proyección de \vec{F} sobre el subespacio ortogonal a \vec{d} .

Solución:

$$a) \quad \left. \begin{array}{l} \vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} = (3, 2, 0) \\ \vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j} = (2, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow W = \langle \vec{F}; \vec{d} \rangle = \langle (3, 2, 0); (2, -1, 0) \rangle = 6 - 2 + 0 = 4.$$

b) Sea

$$V = \langle \vec{d} \rangle = \langle (2, -1, 0) \rangle$$

de modo que

$$\mathbb{R}^3 = V \oplus V^\perp.$$

Como $\vec{F} = (3, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{F} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2; \quad \vec{v}_1 \in V; \quad \vec{v}_2 \in V^\perp$$

además

$$\vec{v}_1 \in V \Rightarrow \vec{v}_1 = \lambda \vec{d} = \lambda(2, -1, 0); \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

De este modo

$$\langle \vec{F}; \vec{d} \rangle = \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2; \vec{d} \rangle = \langle \vec{v}_1; \vec{d} \rangle + \langle \vec{v}_2; \vec{d} \rangle = \lambda \langle \vec{d}; \vec{d} \rangle$$

puesto que $\vec{v}_2 \in V^\perp$ y por tanto $\langle \vec{v}_2; \vec{d} \rangle = 0$. Sustituyendo los valores

$$\langle \vec{F}; \vec{d} \rangle = \lambda \langle \vec{d}; \vec{d} \rangle \Leftrightarrow \langle (3, 2, 0); (2, -1, 0) \rangle = \lambda \langle (2, -1, 0); (2, -1, 0) \rangle \Leftrightarrow 4 = \lambda 5 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{5}$$

siendo

$$\vec{v}_1 = \frac{4}{5}(2, -1, 0) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, 0 \right)$$

c) En este caso nos piden el valor de \vec{v}_2

$$\vec{v}_2 = \vec{F} - \vec{v}_1 = (3, 2, 0) - \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, 0 \right) = \left(\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, 0 \right).$$

También es posible realizar el cálculo directamente, buscando una base de V^\perp cuyas ecuaciones implícitas podemos conocer fácilmente:

$$V^\perp = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z); (2, -1, 0) \rangle = 0 \} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0 \}$$

o en forma paramétrica, tomando $x = \alpha$ y $z = \beta$,

$$(x, y, z) = (\alpha, 2\alpha, \beta) = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 0, 1)$$

para finalmente obtener la base buscada

$$V^\perp = \langle \{\vec{u}_1 = (1, 2, 0); \vec{u}_2 = (0, 0, 1)\} \rangle$$

y por tanto

$$\vec{v}_2 = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 0, 1)$$

Encontraremos α y β multiplicando escalarmente \vec{F} por los vectores de la base

$$\langle \vec{F}; \vec{u}_1 \rangle = \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2; \vec{u}_1 \rangle = \langle \vec{v}_1; \vec{u}_1 \rangle + \langle \vec{v}_2; \vec{u}_1 \rangle = \langle \vec{v}_2; \vec{u}_1 \rangle$$

$$\langle \vec{F}; \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2; \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1; \vec{u}_2 \rangle + \langle \vec{v}_2; \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{v}_2; \vec{u}_2 \rangle$$

donde se ha tenido en cuenta que $\langle \vec{v}_1; \vec{u}_1 \rangle = \langle \vec{v}_1; \vec{u}_2 \rangle = 0$, por estar los primeros vectores en V y los segundos en V^\perp . Sustituyendo los valores de los vectores

$$\langle \vec{F}; \vec{u}_1 \rangle = \langle \vec{v}_2; \vec{u}_1 \rangle \iff \langle (3, 2, 0); (1, 2, 0) \rangle = \langle \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 0, 1); (1, 2, 0) \rangle$$

$$\iff 7 = \alpha \langle (1, 2, 0); (1, 2, 0) \rangle + \beta \langle (0, 0, 1); (1, 2, 0) \rangle$$

$$\iff 7 = 5\alpha$$

$$\langle \vec{F}; \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{v}_2; \vec{u}_2 \rangle \iff \langle (3, 2, 0); (0, 0, 1) \rangle = \langle \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 0, 1); (0, 0, 1) \rangle$$

$$\iff 0 = \alpha \langle (1, 2, 0); (0, 0, 1) \rangle + \beta \langle (0, 0, 1); (0, 0, 1) \rangle$$

$$\iff 0 = \beta$$

de modo que $\alpha = \frac{7}{5}$ y $\beta = 0$

$$\vec{v}_2 = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 0, 1) = \frac{7}{5}(1, 2, 0) + 0(0, 0, 1) = \left(\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, 0 \right),$$

como era de esperar.

6. Se considera el espacio de funciones

$$\mathcal{L}^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R}) = \left\{ f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < \infty \right\}.$$

Se pide:

a) Comprueba que el sistema de vectores

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx), \dots\}. \quad (1)$$

es un sistema ortogonal respecto al producto escalar

$$\langle f; g \rangle_{\mathcal{L}^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx, \quad f, g \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R}).$$

Indicación: Usar las fórmulas trigonométricas siguientes:

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} (\alpha - \beta)$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta).$$

- b) Dada una función $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$, a las coordenadas de f en el sistema (1) se les llama coeficientes de Fourier, es decir,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)).$$

El término de la derecha en la igualdad anterior se llama serie de Fourier de f . Hay una diferencia importante en la combinación lineal anterior: la suma tiene infinitos términos, pero este asunto será tratado Matemáticas II. Comprueba que los coeficientes de Fourier a_n y b_n están dados por las fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx, \quad n \geq 1$$

- c) Calcula los coeficientes de Fourier en $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = |x|$.

Solución:

- a) Hay que comprobar que si $f, g \in \{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \dots, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx), \dots\}$, entonces

$$\langle f, g \rangle = 0; \quad \forall f \neq g.$$

Distinguimos los siguientes casos para $m, n \in \mathbb{N}$

	$f(x)$	$g(x)$	
i)	1	$\cos mx$	$m \neq 0$
ii)	1	$\operatorname{sen} mx$	$m \neq 0$
iii)	$\cos nx$	$\cos mx$	$m \neq n$
iv)	$\operatorname{sen} nx$	$\operatorname{sen} mx$	$m \neq n$
v)	$\cos nx$	$\operatorname{sen} mx$	

Recordemos que para cada $m \in \mathbb{Z}$, se cumple

$$\cos m\pi = (-1)^m$$

$$\operatorname{sen} m\pi = 0$$

- i) Caso $f(x) = 1$ y $g(x) = \cos mx$

$$\langle f; g \rangle = \langle 1; \cos mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \frac{\operatorname{sen}(mx)}{m} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \left(\frac{\operatorname{sen}(m\pi)}{m} - \frac{\operatorname{sen}(-m\pi)}{m} \right) = \left(\frac{0}{m} - \frac{0}{m} \right) = 0.$$

ii) Caso $f(x) = 1$ y $g(x) = \text{sen } mx$

$$\begin{aligned}\langle f; g \rangle &= \langle 1; \text{sen } mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } mx \, dx \\ &= -\frac{1}{m} \cos(mx) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \left(\frac{\cos(-m\pi)}{m} - \frac{\cos(m\pi)}{m} \right) = \left(\frac{-1}{m} - \frac{-1}{m} \right) = 0.\end{aligned}$$

iii) Caso $f(x) = \cos nx$ y $g(x) = \cos mx$

$$\begin{aligned}\langle f; g \rangle &= \langle \cos nx; \cos mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{sen}(m+n)x}{(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)x}{(m-n)} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\text{sen}(m+n)\pi}{(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)\pi}{(m-n)} \right) - \left(\frac{\text{sen}(m+n)(-\pi)}{(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)(-\pi)}{(m-n)} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{0}{(m+n)} + \frac{0}{(m-n)} \right) - \left(\frac{0}{(m+n)} + \frac{0}{(m-n)} \right) \right\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

iv) Caso $f(x) = \text{sen } nx$ y $g(x) = \text{sen } mx$

$$\begin{aligned}\langle f; g \rangle &= \langle \text{sen } nx; \text{sen } mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } nx \text{sen } mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\text{sen}(m+n)x}{(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)x}{(m-n)} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{\text{sen}(m+n)\pi}{(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)\pi}{(m-n)} \right) - \left(-\frac{\text{sen}(m+n)(-\pi)}{(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)(-\pi)}{(m-n)} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{0}{(m+n)} + \frac{0}{(m-n)} \right) - \left(-\frac{0}{(m+n)} + \frac{0}{(m-n)} \right) \right\} \\ &= 0\end{aligned}$$

v) Caso $f(x) = \cos nx$ y $g(x) = \text{sen } mx$

$$\langle f; g \rangle = \langle \cos nx; \text{sen } mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \text{sen } mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\text{sen}(m+n)x + \text{sen}(m-n)x] \, dx.$$

Se distinguen dos casos.

Si $m \neq n$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\text{sen}(m+n)x + \text{sen}(m-n)x] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\cos(m+n)x}{(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{(m-n)} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{\cos(m+n)\pi}{(m+n)} + \frac{\cos(m-n)\pi}{(m-n)} \right) - \left(-\frac{\cos(m+n)(-\pi)}{(m+n)} + \frac{\cos(m-n)(-\pi)}{(m-n)} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)} + \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)} \right) - \left(-\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)} + \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)} + \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)} + \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)} - \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)} \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

1) Si $m = n$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\text{sen}(m+n)x + \text{sen}(m-n)x] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\text{sen}(2m)x + \text{sen}(0x)] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(2m)x dx \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\cos(2m)x}{2m} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{\cos(2m)\pi}{2m} \right) - \left(-\frac{\cos(2m)(-\pi)}{2m} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{1}{2m} \right) - \left(-\frac{1}{2m} \right) \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Nos queda por comprobar los casos en los que $f(x) = g(x)$. Si $f(x) = g(x) = \cos nx$

$$\begin{aligned}
 \langle f; g \rangle &= \langle \cos nx; \cos nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2nx)) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2n} \text{sen } 2nx \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\pi + \frac{\text{sen}(2n\pi)}{2n} \right) - \left(-\pi + \frac{\text{sen}(-2n\pi)}{2n} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \{(\pi + 0) - (-\pi + 0)\} = \pi
 \end{aligned}$$

Mientras que si $f(x) = g(x) = \text{sen } mx$

$$\begin{aligned} \langle f; g \rangle &= \langle \text{sen } nx; \text{sen } nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } nx \text{sen } nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2nx)) \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2n} \text{sen } 2nx \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\pi - \frac{\text{sen}(2n\pi)}{2n} \right) - \left(-\pi - \frac{\text{sen}(-2n\pi)}{2n} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{(\pi + 0) - (-\pi + 0)\} = \pi \end{aligned}$$

Finalmente si $f(x) = g(x) = 1$

$$\langle f; g \rangle = \langle 1; 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = x \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 2\pi$$

b) Usando propiedad de bilinealidad

$$\begin{aligned} \langle f(x); 1 \rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)); 1 \right\rangle \\ &= \frac{a_0}{2} \langle 1; 1 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \cos(nx); 1 \rangle + b_n \langle \text{sen}(nx); 1 \rangle = \frac{a_0}{2} 2\pi = \pi a_0, \end{aligned}$$

de donde por los apartados *i*) y *ii*):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \langle f(x); 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx.$$

Para calcular los a_m , multiplicamos por $\cos mx$

$$\begin{aligned} \langle f(x); \cos mx \rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)); \cos mx \right\rangle \\ &= \frac{a_0}{2} \langle 1; \cos mx \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \cos(nx); \cos mx \rangle + b_n \langle \text{sen}(nx); \cos mx \rangle \\ &= a_m \pi \end{aligned}$$

de donde por los apartados *i*), *iii*) y *v*)

$$a_m = \frac{1}{\pi} \langle f(x); \cos mx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) \, dx$$

Para calcular los b_m , multiplicamos por $\text{sen } mx$

$$\begin{aligned} \langle f(x); \text{sen } mx \rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)); \text{sen } mx \right\rangle \\ &= \frac{a_0}{2} \langle 1; \text{sen } mx \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \cos(nx); \text{sen } mx \rangle + b_n \langle \text{sen}(nx); \text{sen } mx \rangle \\ &= b_m \pi \end{aligned}$$

de donde por los apartados *i*), *iv*) y *v*)

$$b_m = \frac{1}{\pi} \langle f(x); \text{sen } mx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(mx) \, dx.$$

c) Si $f(x) = x$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0.$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(mx) dx = 0.$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(mx) dx = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Si $f(x) = |x|$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi.$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(mx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x \cos(mx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(mx) dx = \frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1).$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \operatorname{sen}(mx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x \operatorname{sen}(mx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(mx) dx = 0.$$