Curso 2020/2021
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas tema 6
Aplicaciones Lineales
Núcleo e Imagen

1. Determina si las siguientes aplicaciones $f : V \to W$, son o no lineales.

   a) $V = W = \mathbb{R}^3$ $\quad f(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 0)$.
   b) $V = W = \mathbb{R}^3$ $\quad g(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 8)$.
   c) $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}$ $\quad f(x, y) = x^2 + y - 5x$.
   d) $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}$ $\quad f(x, y) = |x + y|$.

2. Sean V y W espacios vectoriales y sea $f : V \to W$, una aplicación lineal. Demuestra los siguientes apartados:

   a) Si $S = \langle\{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_m\}\rangle \subseteq V \Longrightarrow f(S) = \langle\{f(\overrightarrow{v}_1), \dots, f(\overrightarrow{v}_m)\}\rangle$.
   b) Si $B = \langle\{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_n\}\rangle \subseteq V$ es base de $V \Longrightarrow \operatorname{Im}(f) = \langle\{f(\overrightarrow{v}_1), \dots, f(\overrightarrow{v}_m)\}\rangle$.
   c) Si f es sobreyectiva $\Rightarrow \dim(W) \leq \dim(V)$.

3. ¿Existirá una aplicación lineal tal que $f(1, 0, 0) = (1, 1), f(0, 1, 0) = (21, -3), f(0, 0, 1) = (-1, 2)$ y $f(1, 0, 1) = (-1, 1)$? ¿Y si fuera $f(1, 0, 1) = (0, 3)$?

4. Demuestra la ecuación de las dimensiones para aplicaciones entre espacios vectoriales de dimensión finita, es decir, si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, entonces se cumple

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f).$$

5. Para las siguientes aplicaciones lineales $f : V \to W$ calcula tanto el núcleo como la imagen e indica las propiedades de la aplicación (ver si es inyectiva y suprayectiva).

   a) $V = W = \mathbb{R}^3$ $\quad f(x, y, z) = (z, x + y, -z)$.
   b) $V = W = \mathbb{R}^3$ $\quad f(x, y, z) = (x - y + 2z, y - z, x + 2z)$.
   c) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^4$ $\quad f(x, y, z) = (z, x + y, -z, y - x)$.
   d) $V = \mathbb{R}^4, W = \mathbb{R}^2$ $\quad f(x, y, z, t) = (x - 3y + 8t, 2x)$.
   e) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$ $\quad f(x, y, z) = (x + y + z, 0)$.
   f) $V = W = \mathbb{R}^3$ $\quad f(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, z)$.

6. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Halla la matriz asociada a f respecto de la base

$$B' = \{(1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)\}.$$

7. Se considera la aplicación lineal
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$
que cumple que
$$f(1,0)=(2,3-1)\quad \text{y}\quad f(0,1)=(0,-2,3)$$
Dadas bases respectivas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$
$$\begin{aligned} B &= \{(-1,2);(3,0)\} \\ \\ B' &= \{(0,0,-1);(0,2,1);(-1,1,4)\}, \end{aligned}$$
se pide obtener las matrices asociadas siguientes

(a) $M_{C_2\to C_3}(f)$ (b) $M_{B\to C_3}(f)$ (c) $M_{C_2\to B'}(f)$

siendo C_2 la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y C_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

8. Supongamos que tenemos una aplicación lineal
$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$
y que consideramos en el primer espacio vectorial la base canónica C_3 y en el segundo una base B. Supongamos que
$$M_{C_3\to B}(f)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Dado el vector $\overrightarrow{v}=(2,-1,2)\in\mathbb{R}^3$ halla $f(\overrightarrow{v})_B$. Halla los posibles $\overrightarrow{w}\in\mathbb{R}^3$ tales que $f(\overrightarrow{w})_B=(2,4)$.

9. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la base
$$B=\{\overrightarrow{v}_1=(-2,1,1);\overrightarrow{v}_2=(1,-1,0);\overrightarrow{v}_3=(3,2,-4)\}$$
y el endomorfismo f tal que
$$M_{B\to B}(f)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & b-1 \\ -2 & 2 & c \end{pmatrix}$$
siendo $a,b,c\in\mathbb{R}$ tales que $f(\overrightarrow{v}_2+\overrightarrow{v}_3)=\overrightarrow{v}_1+\overrightarrow{v}_2$.

   a) Justifica que $a=2, b=3$ y $c=-2$.
   b) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica y su expresión analítica.
   c) Calcula $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$. ¿Es f inyectiva?¿Es f suprayectiva?

10. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la base
$$B=\{\overrightarrow{v}_1=(1,-1,0);\overrightarrow{v}_2=(0,1,-1);\overrightarrow{v}_3=(1,0,1)\}$$
y en $\mathbb{R}^2$ la base
$$B'=\{\overrightarrow{w}_1=(-1,1);\overrightarrow{w}_2=(-1,0)\}$$
Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que
$$M_{B\to B'}(f)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Calcula:

a) La matriz de la aplicación f respecto de las bases canónicas respectivas.

b) La expresión analítica de dicha aplicación.

c) Calcula $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$ y bases para estos subespacios.

d) ¿Es f inyectiva?¿Es f suprayectiva?

11. Determina un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifique $\ker f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}$ y $f(0,1,1) = (2,1,-1)$.

12. Determina un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifique $\ker f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0; x + z = 0\right\}$ e $\operatorname{Im} f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}$.

13. Determina la matriz asociada en las bases canónicas para cada una de las siguientes aplicaciones lineales:

    a) En $\mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal de base $U = \langle\{(1,1,0);(0,1,-1)\}\rangle$.

    b) En $\mathbb{R}^3$ la simetría ortogonal de base $W = \langle\{(1,0,1);(1,0,-1)\}\rangle$.

14. Consideremos los espacios vectoriales $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$ y $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ de los polinomios de grado menor o igual que 3 y 2, respectivamente. En el primero de ellos tomamos la base $B = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ y en el segundo la base $B' = \left\{1, x, x^2\right\}$. Se pide:

    a) **Matriz de la derivada**. Consideremos la aplicación que asocia a cada polinomio su derivada, es decir,

    $$\begin{array}{rccl} D: & \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] & \to & \mathbb{P}_2[\mathbb{R}] \\ & p(x) & \mapsto & D(p)(x) = p'(x). \end{array}$$

    Comprueba que D es una aplicación lineal y que la matriz asociada a D en las bases B y B' es

    $$M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

    b) **Matriz de la integral**. Consideremos ahora la aplicación que asocia a cada polinomio su integral, es decir,

    $$\begin{array}{rccl} I: & \mathbb{P}_2[\mathbb{R}] & \to & \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] \\ & p(x) & \mapsto & I(p)(x) = \displaystyle\int_0^x p(t)\,dt. \end{array}$$

    Comprueba que I es una aplicación lineal y que la matriz asociada a I en las bases B' y B es

    $$M_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}(I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

    c) Calcula $\ker D$ y $\ker I$.

    d) Comprueba que $M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(D) \cdot M_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}(I) = I_3$, con I_3 la matriz identidad de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Nótar que esta identidad matricial es una epecie de versión matricial del Teorema Fundamental del Cálculo: La derivada de la integral de una función $f(x)$ es ella misma, es decir, derivación e integración son operaciones inversas.

15. Los gráficos por ordenador tratan con imágenes. Estas imágenes se mueven, cambian de escala, se giran y se proyectan (imágenes 3D sobre planos e imágenes 2D sobre rectas). Las tres últimas transformaciones se representan matemáticamente, en el espacio tridimensional, por medio de las siguientes aplicaciones lineales:

   - **Cambio de escala** (Scaling o Rescaling en inglés):
   $$\begin{array}{rlcl} S: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) & \mapsto & S(\overrightarrow{v}) := (c_1 v_1, c_2 v_2, c_3 v_3) \end{array}$$
   con $c_k > 0$, $1 \leq k \leq 3$. Calcula la matriz asociada a S en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
   - **Rotación**: una rotación en el plano de ángulo θ se puede realizar por medio de la matriz
   $$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
   ¿Cómo es la matriz que permite rotar vectores en el plano YZ ?
   - **Proyección**: en los cursos de Álgebra Lineal casi todos los planos pasan por el origen. En la vida real, casi ninguno. Dado un vector unitario $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, n_3)$ y otro vector fijo $\overrightarrow{v}_0 = \left(v_1^0, v_2^0, v_3^0\right)$, la proyección de cualquier vector tridimensional $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sobre el plano de ecuación $n_1 x + n_2 y + n_3 z = v_1 n1 + v_2 n_2 + v_3 n_3$ se calcula multiplicando el vector de coordenadas $(v_1, v_2, v_3, 1)$ por la matriz 4×4 (llamada de proyección)
   $$P = \begin{pmatrix} I_3 & \overrightarrow{v}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 - \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 & -\overrightarrow{v}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Comprueba que la proyección del vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sobre el plano XY se puede calcular mediante el procedimiento anterior.
   - Aunque en principio, una translación es fácil de entender, sin embargo no es una aplicación lineal. En efecto, comprueba que si $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector fijo, entonces la aplicación
   $$\begin{array}{rlcl} T_{\overrightarrow{a}}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) & \mapsto & T_{\overrightarrow{a}}(\overrightarrow{v}) = (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3), \end{array}$$
   no es lineal. Por tanto, una traslación en el espacio tridimensional no se puede representar por medio de una matriz 3×3. Esta dificultad se soluciona aumentando en uno el tamaño de la matriz de modo que la translación de vector $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ se calculará por medio de la matriz
   $$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   para ello hay que considerar las llamadas coordenadas homogéneas de un vector $\overrightarrow{v}$, definidas como
   $$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow \overrightarrow{v}_h = (v_1, v_2, v_3, 1).$$
   Demuestra que.
   $$T_{\overrightarrow{a_h}}(\overrightarrow{v_h}) = \overrightarrow{a_h} + \overrightarrow{v_h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
