1. Sean $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, vectores propios de una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ asociados a valores propios distintos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Cada vector propio de A tiene asociado un único valor propio.

   b) Para todo $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\alpha \overrightarrow{u}$ es un vector propio asociado al mismo valor propio λ.

   c) $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores linealmente independientes.

   d) Una matriz tiene el valor propio 0 si y sólo si su determinante es 0.

   e) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ es un vector propio de A.

   f) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces λ^n es un valor propio de A^n y si A es regular, $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1}.

   g) Si A,C son semejantes entonces tienen el mismo determinante, el mismo polinomio característico y los mismos valores propios.

   h) Dos matrices diagonalizables son semejantes si y sólo si tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

   Solución:

   a) Verdadera. Si $(\lambda, \overrightarrow{u})$ es el valor y vector propios asociados tendremos

   $$A\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{u},$$

   si u estuviera asociado también a μ, entonces debería cumplirse

   $$A\overrightarrow{u} = \mu \overrightarrow{u}$$

   e igualando obtenemos

   $$\lambda \overrightarrow{u} = \mu \overrightarrow{u} \Rightarrow \lambda \overrightarrow{u} - \mu \overrightarrow{u} = 0 \Rightarrow (\lambda - \mu)\, u \overrightarrow{u} = 0$$

   y como $\overrightarrow{u}$ es un vector propio, entonces $\overrightarrow{u} \neq 0$ y por tanto

   $$\lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu.$$

   b) Verdadera. Si $(\lambda, \overrightarrow{u})$ es el valor y vector propios asociados tendremos $A\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{u}$

   $$A(\alpha \overrightarrow{u}) = \alpha A \overrightarrow{u} = \alpha \lambda \overrightarrow{u} = \lambda (\alpha \overrightarrow{u})$$

   luego $\alpha \overrightarrow{u}$ es un vector propio asociado al valor propio λ.

   c) Verdadero. Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ fueran linealmente dependientes, entonces debería existir $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{u}$, y por el apartado anterior ambos vectores serían vectores propios del valor propio λ, lo que contradice el enunciado.

   d) Verdadero. Suponiendo que 0 es un valor propio de A entonces, debe existir $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$, con $\overrightarrow{u} \neq 0$, vector propio asociado de forma que

   $$A\overrightarrow{u} = 0\overrightarrow{u} = 0$$

   es decir, el sistema

   $$A\overrightarrow{x} = 0$$

   tiene como solución no nula a $\overrightarrow{u}$ y por tanto es un sistema compatible indeterminado y por el teorema de Rouché-Frobenius eso implica que $\det(A) = 0$ y viceversa.

e) Falso. Suponiendo que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ fuera un vector propio de A, entonces debería existir un $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que

$$A\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = \alpha\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right)$$

pero si aplicamos la propiedad distributiva tendremos

$$A\overrightarrow{u} + A\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}.$$

Ahora bien, $\overrightarrow{u}$ es un vector propio de A con valor propio asociado λ y $\overrightarrow{v}$ es un vector propio de A con valor propio asociado μ, por tanto

$$\lambda\overrightarrow{u} + \mu v = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$$

de donde

$$(\lambda - \alpha)\overrightarrow{u} + (\mu - \alpha)\overrightarrow{v} = 0,$$

como por el apartado c, los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente independientes, debe cumplirse

$$\lambda - \alpha = \mu - \alpha = 0$$

que conduce a

$$\lambda = \mu,$$

lo que contradice el enunciado del problema.

f) Ambas son verdaderas. Lo hacemos por inducción en n. Supongamos que $n = 2$, entonces

$$A^2\overrightarrow{u} = A\left(A\overrightarrow{u}\right)$$

como $\overrightarrow{u}$ es un vector propio de A, con valor propio asociado λ, tendremos $A\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u}$, luego

$$A\left(A\overrightarrow{u}\right) = A\left(\lambda\overrightarrow{u}\right) = \lambda\left(A\overrightarrow{u}\right) = \lambda\left(\lambda\overrightarrow{u}\right) = \lambda^2\overrightarrow{u}$$

luego λ^2 es un valor propio de A^2 asociado al vector propio $\overrightarrow{u}$. Suponiendo ahora que la propiedad es cierta para $n \in \mathbb{N}$, es decir λ^n es un valor propio de A^n, demostraremos a continuación que λ^{n+1} es un valor propio de A^{n+1} :

$$A^{n+1}\overrightarrow{u} = A\left(A^n\overrightarrow{u}\right) = A\left(\lambda^n\overrightarrow{u}\right) = \lambda^n\left(A\overrightarrow{u}\right) = \lambda^n\left(\lambda\overrightarrow{u}\right) = \lambda^{n+1}\overrightarrow{u}.$$

Para la segunda afirmación suponemos que A es regular, es decir, A es invertible, existe A^{-1} y $\det(A) \neq 0$. Supongamos que $\overrightarrow{u}$ es un valor propio de A asociado al valor propio λ, es decir

$$A\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u}$$

Multiplicamos a izquierda por A^{-1}

$$A^{-1}\left(A\overrightarrow{u}\right) = A^{-1}\left(\lambda\overrightarrow{u}\right)$$

por tanto

$$A^{-1}A\overrightarrow{u} = \lambda\left(A^{-1}\overrightarrow{u}\right) \Rightarrow I_n\overrightarrow{u} = \lambda\left(A^{-1}\overrightarrow{u}\right) \Rightarrow \lambda\left(A^{-1}\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$$

Como A es regular, entonces por el apartado d, $\lambda \neq 0$ y podemos dividir por este valor

$$\left(A^{-1}\overrightarrow{u}\right) = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{u}$$

de modo que $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{-1} asociado al vector propio $\overrightarrow{u}$.

g) Verdadero. Si A y C son semejantes, entonces $\exists Q \in M_n(\mathbb{R})$, matriz invertible tal que

$$A = Q^{-1}CQ$$

Está claro que

$$\det(A) = \det\left(Q^{-1}CQ\right) = \det\left(Q^{-1}\right)\det(C)\det(Q)$$

y como y como

$$\det\left(Q^{-1}\right) = \frac{1}{\det(Q)}$$

está claro que

$$\det(A) = \det(C).$$

El polinomio característico de A es

$$\phi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

o bien, por la semejanza de matrices

$$\phi_A(\lambda) = \det\left(Q^{-1}CQ - \lambda I\right)$$

Por otra parte, podemos poner

$$I = Q^{-1}Q$$

para obtener

$$\phi_A(\lambda) = \det\left(Q^{-1}CQ - \lambda Q^{-1}Q\right)$$

que se puede expresar como

$$\phi_A(\lambda) = \det\left(Q^{-1}(C - \lambda I)Q\right)$$

finalmente por las propiedades de los determinantes

$$\phi_A(\lambda) = \det\left(Q^{-1}(C - \lambda I)Q\right) = \phi_A(\lambda) = \det\left(Q^{-1}\right)\det(C - \lambda I)\det(Q)$$

y se deduce

$$\phi_A(\lambda) = \det(C - \lambda I) = \phi_C(\lambda)$$

Obviamente al ser el mismo polinomio característico, sus raíces serán las mismas y por tanto los valores propios de ambas matrices coinciden.

h) Verdadero. Si A y C son semejantes, entonces por el apartado anterior tienen el mismo polinomio característico y por tanto tienen las mismas raíces con las mismas multiplicidades.

Supongamos ahora que A y C son diagonalizables y tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades. Como A y C son diagonalizables, entonces son semejantes a la misma matriz diagonal, puesto que esta matriz está formada por los valores propios, incluidas multiplicidades que, en ambas matrices, son iguales. Luego A y C son semejantes a cierta matriz diagonal D, es decir, existen matrices P y Q tal que

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}DP \Leftrightarrow PAP^{-1} = D \\ C &= Q^{-1}DP \Leftrightarrow QCQ^{-1} = D \end{aligned}$$

es decir

$$PAP^{-1} = QCQ^{-1}$$

multiplicando a la izquierda por P^{-1} y a la derecha por P ambos miembros de la igualdad tendremos

$$P^{-1}PAP^{-1}P = P^{-1}QCQ^{-1}P$$

y podemos escribir

$$A = P^{-1}QCQ^{-1}P$$

Si ahora usamos que

$$\left(Q^{-1}P\right)^{-1} = P^{-1}\cdot\left(Q^{-1}\right)^{-1} = P^{-1}Q$$

entonces

$$A = \left(Q^{-1}P\right)^{-1} C \left(Q^{-1}P\right)$$

es decir existe una matriz $R = Q^{-1}P$ tal que

$$A = R^{-1}CR$$

luego A y C son semejantes.

2. Estudiar los valores propios de las siguientes matrices, decir si son diagonalizables y en caso afirmativo obtener la matriz de paso y la potencia n–ésima, siendo $n \in \mathbb{N}$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} -26 & -15 \\ 50 & 29 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (e) $E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (h) $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (i) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \phi_A(\lambda) &= |A-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 6 & -3-\lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda^2+\lambda, \\ \phi_A(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ y } \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

Como los valores propios son reales y distintos, la matriz es diagonalizable. A continuación los vectores propios correspondientes. Para el autovalor $\lambda_1 = 0$

$$\ker(A-\lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ 6x-3y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = 2x,$$

los autovectores son de la forma $(x, 2x) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \langle(1,2)\rangle$.
Para el autovalor $\lambda_2 = -1$

$$\ker(A-\lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-y=0 \\ 6x-2y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = 3x,$$

los autovectores son de la forma $(x, 3x) \Longrightarrow N_{\lambda_2} = \langle(1,3)\rangle$. Por tanto

$$\begin{aligned} D_A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ P_A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned}\phi_B(\lambda) &= |B-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix} -26-\lambda & -15 \\ 50 & 29-\lambda\end{pmatrix}\right| = \lambda^2-3\lambda-4,\\ \phi_B(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2}\Leftrightarrow \lambda_1=4 \text{ y } \lambda_2=-1\end{aligned}$$

Como los valores propios son reales y distintos, la matriz es diagonalizable. A continuación los vectores propios correspondientes. Para el autovalor $\lambda_1 = 4$

$$\ker(B-\lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -30 & -15 \\ 50 & 25\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -30x-15y=0 \\ 50x+25y=0\end{array}\right. \Leftrightarrow y=-2x,$$

los autovectores son de la forma $(x,-2x) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \langle(1,-2)\rangle$.
Para el autovalor $\lambda_2 = -1$

$$\ker(B-\lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -25 & -15 \\ 50 & 30\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -25x-15y=0 \\ 50x+30y=0\end{array}\right. \Leftrightarrow y=-\frac{5}{3}x,$$

los autovectores son de la forma $\left(x,-\frac{5}{3}x\right) \Longrightarrow N_{\lambda_2} = \left\langle\left(1,-\frac{5}{3}\right)\right\rangle = \langle(3,-5)\rangle$. Por tanto

$$\begin{aligned} D_B &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\\ P_B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5\end{pmatrix} \Rightarrow P_B = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^n &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -5\times4^n-6 & -3\times4^n-3 \\ 10\times4^n+10 & 6\times4^n+5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\phi_C(\lambda) &= |C-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 4 & 2-\lambda\end{pmatrix}\right| = \lambda^2,\\ \phi_C(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2=0 \Leftrightarrow \lambda_1=0 \text{ y } m(\lambda_1)=2\end{aligned}$$

Calculamos el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 0$

$$\ker(C-\lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x-y=0 \\ 4x+2y=0\end{array}\right. \Leftrightarrow y=-2x,$$

los autovectores son de la forma $(x,-2x) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \langle(1,-2)\rangle$, que tiene dimensión 1, como la multiplicidad de λ_1 es $2 \neq 1$, la matriz no es diagonalizable.

d)

$$\begin{aligned}\phi_D(\lambda) &= |D-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda\end{pmatrix}\right| = \lambda^2+1,\\ \phi_D(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda_1=i \text{ y } \lambda_2=-i.\end{aligned}$$

Como los valores propios son complejos la matriz no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

e)

$$\phi_E(\lambda) = |E-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 5-\lambda \end{pmatrix}\right| = -\lambda^3+15\lambda^2-72\lambda+112$$

$$\phi_E(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3+15\lambda^2-72\lambda+112=0 \Leftrightarrow \lambda_1=4 \text{ con } m(\lambda_1)=2 \text{ y } \lambda_2=7 \text{ con } m(\lambda_2)=1$$

Calculamos los subespacios propios. Para el autovalor $\lambda_1 = 4$

$$\ker(E-\lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow z=-x-y,$$

los autovectores son de la forma $(x,y,-x-y) = x(1,0,-1)+y(0,1,-1) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \langle\{(1,0,-1);(0,1,-1)\}\rangle$. Para el autovalor $\lambda_2 = 7$

$$\ker(E-\lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=z,$$

los autovectores son de la forma $(x,x,x) \Longrightarrow N_{\lambda_2} = \langle(1,1,1)\rangle$ Por tanto

$$D_E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P_E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_E = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} E^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}4^n+\frac{1}{3}7^n & \frac{1}{3}7^n-\frac{1}{3}4^n & \frac{1}{3}7^n-\frac{1}{3}4^n \\ \frac{1}{3}7^n-\frac{1}{3}4^n & \frac{2}{3}4^n+\frac{1}{3}7^n & \frac{1}{3}7^n-\frac{1}{3}4^n \\ \frac{1}{3}7^n-\frac{1}{3}4^n & \frac{1}{3}7^n-\frac{1}{3}4^n & \frac{2}{3}4^n+\frac{1}{3}7^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f)

$$\phi_F(\lambda) = |F-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)^3$$

$$\phi_F(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ con } m(\lambda_1)=3$$

Calculamos el subespacios propios para el autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\ker(F-\lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2y+3z=0 \\ 2y=0 \\ 0=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y=z=0,$$

los autovectores son de la forma $(x,0,0) = x(1,0,0) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \langle\{(1,0,0)\}\rangle$. Como $\dim(N_{\lambda_1}) = 1 \neq m(\lambda_1)$ la matriz no es diagonalizable.

g)

$$\begin{aligned}
\phi_G(\lambda) &= |G-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)^3 \\
\phi_G(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ con } m(\lambda_1) = 3.
\end{aligned}$$

Calculamos el subespacio propio para el autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\ker(G-\lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2y+3z=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow z = -\frac{2}{3}y,$$

los autovectores son de la forma $\left(x,y,-\frac{2}{3}y\right) = x(1,0,0)+y\left(0,1,-\frac{2}{3}\right) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \left\langle\left\{(1,0,0);\left(0,1,-\frac{2}{3}\right)\right\}\right\rangle$.
Como $\dim(N_{\lambda_1}) = 2 \neq m(\lambda_1)$, la matriz no es diagonalizable.

h)

$$\begin{aligned}
\phi_H(\lambda) &= |H-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 3 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}\right| = -\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda+8 \\
\phi_H(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow -\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda+8 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \text{ con } m(\lambda_1) = 1 \text{ y } \lambda_2 = -2 \text{ con } m(\lambda_2) = 2
\end{aligned}$$

Calculamos los subespacios propios. Para el autovalor $\lambda_1 = 2$

$$\ker(H-\lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -x+y+3z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \\ -4z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow z=0; x=y,$$

los autovectores son de la forma $(x,x,0) = x(1,1,0) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \langle\{(1,1,0)\}\rangle$.
Para el autovalor $\lambda_2 = -2$

$$|H-\lambda_2 I| = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x+y+3z=0 \\ 3x+y+3z=0 \\ 0=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = -3(x+z),$$

los autovectores son de la forma

$$(x,-3(x+z),z) = x(1,-3,0)+z(0,-3,1) \Longrightarrow N_{\lambda_2} = \langle\{(1,-3,0);(0,-3,1)\}\rangle.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
D_H &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
P_H^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_H = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
H^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-2)^n + \frac{3}{4}2^n & \frac{1}{4}2^n - \frac{1}{4}(-2)^n & \frac{3}{4}2^n - \frac{3}{4}(-2)^n \\ \frac{3}{4}2^n - \frac{3}{4}(-2)^n & \frac{3}{4}(-2)^n + \frac{1}{4}2^n & \frac{3}{4}2^n - \frac{3}{4}(-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$i)$

$$
\phi_J(\lambda) = |J - \lambda I_n| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2 = (\lambda-1)^3(\lambda-2)
$$

$$
\phi_J(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ con } m(\lambda_1) = 3 \text{ y } \lambda_2 = 2 \text{ con } m(\lambda_2) = 1
$$

Calculamos los subespacios propios. Para el autovalor $\lambda_1 = 1$

$$
\ker(J - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ -6x + 3y + 3z + 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2x - y - z,
$$

los autovectores son de la forma $(x, y, z, 2x - y - z) = x(1,0,0,2) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \langle\{(1,0,0,2);(0,1,0,-1);(0,0,1,-1)\}\rangle$.
Para el autovalor $\lambda_2 = 2$

$$
|J - \lambda_2 I| = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ 2x - 2y - z - t = 0 \\ 2x - y - 2z - t = 0 \\ -6x + 3y + 3z + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y \\ t = -3y \end{cases},
$$

los autovectores son de la forma $(0, y, y, -3y) = y(0,1,1,-3) \Longrightarrow N_{\lambda_2} = \langle\{(0,1,1,-3)\}\rangle$. Por tanto

$$
\begin{aligned}
D_J &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
P_J^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow P_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\times 2^n - 2 & 2 - 2^n & 1 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2\times 2^n - 2 & 1 - 2^n & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 6 - 6\times 2^n & 3\times 2^n - 3 & 3\times 2^n - 3 & 3\times 2^n - 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3. Estudiar según los valores de los parámetros, si son diagonalizables las siguientes matrices:

$$
\textbf{(a)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \textbf{(b)}\ B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad \textbf{(c)}\ C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}
$$

Solución:

a)

$$
\begin{aligned}
\phi_A(\lambda) &= |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & \alpha - \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda(\lambda - 3)(\alpha - \lambda) \\
\phi_A(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 3)(\alpha - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = \alpha
\end{aligned}
$$

Si $\alpha \notin \{0, 3\} \Rightarrow$ Todos los valores son reales y distintos, por tanto la matriz será diagonalizable.
Supongamos que $\alpha = 0$, entonces $\lambda_1 = 0$ es un valor propio con $m(\lambda_1) = 2$. Para que A sea diagonalizable en este caso $\dim(N_{\lambda_1}) = 2$

$$
\ker(A - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = -2y,
$$

los autovectores son de la forma $(-2y, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(0, 0, 1) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \langle \{(-2, 1, 0); (0, 0, 1)\} \rangle$ y por tanto $\dim(N_{\lambda_1}) = 2$ y la matriz A será diagonalizable.
Supongamos que $\alpha = 3$, entonces $\lambda_2 = 3$ es un valor propio con $m(\lambda_2) = 2$. Para que A sea diagonalizable en este caso $\dim(N_{\lambda_2}) = 2$

$$
\ker(A - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = 0,
$$

los autovectores son de la forma $(0, 0, z) = z(0, 0, 1) \Longrightarrow N_{\lambda_2} = \langle \{(0, 0, 1)\} \rangle$ Por tanto la matriz no será diagonalizable en este caso.

b)

$$
\begin{aligned}
\phi_B(\lambda) &= |B - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & \alpha & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \beta \\ 0 & 0 & \gamma - \lambda \end{pmatrix} \right| = (1 - \lambda)^2 (\gamma - \lambda) \\
\phi_B(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 (\gamma - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \gamma
\end{aligned}
$$

Distinguimos dos casos, si $\gamma = 1$ o si $\gamma \neq 1$.

Supongamos que $\gamma = 1$, entonces $\lambda_1 = 1$ es un valor propio con $m(\lambda_1) = 3$. Para que B sea diagonalizable en este caso $\dim(N_{\lambda_1}) = 3$

$$\ker(B - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha y + z = 0 \\ \\ \beta y = 0 \end{array} \right.$$

De la segunda ecuación tendremos dos opciones: $\beta \neq 0$ o $\beta = 0$. Si $\beta \neq 0 \Rightarrow y = 0$, y la primera ecuación nos daría $z = 0$, de modo que los autovectores son de la forma $(x, 0, 0) = x(1, 0, 0) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \langle\{(1, 0, 0)\}\rangle$ y por tanto $\dim(N_{\lambda_1}) = 1$ y la matriz A no será diagonalizable. Para el caso $\beta = 0$, entonces sólo nos queda la ecuación $\alpha y + z = 0 \Rightarrow z = -\alpha y$, de modo que los autovectores son de la forma $(x, y, -\alpha y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -\alpha) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \langle\{(1, 0, 0), (0, 1, -\alpha)\}\rangle$ y por tanto $\dim(N_{\lambda_1}) = 2$ y la matriz B no será diagonalizable

Supongamos ahora que $\gamma \neq 1$, entonces $\lambda_1 = 1$ es un valor propio con $m(\lambda_1) = 2$. Para que B sea diagonalizable en este caso $\dim(N_{\lambda_2}) = 2$

$$\ker(B - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha y + z = 0 \\ \beta y = 0 \\ (\gamma - 1) z = 0 \end{array} \right.$$

Como $\gamma \neq 1$, la última ecuación nos da $z = 0$, así que nos queda

$$\begin{array}{rcl} \alpha y & = & 0 \\ \beta y & = & 0 \end{array}$$

Para $\alpha \neq 0$ o $\beta \neq 0$ las ecuaciones nos dan $y = 0$ y los autovectores son de la forma $(x, 0, 0) = x(1, 0, 0) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \langle\{(1, 0, 0)\}\rangle$, por tanto la matriz no sería diagonalizable en este caso. Si $\alpha = \beta = 0$, entonces los autovectores son de la forma $(x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \langle\{(1, 0, 0); (0, 1, 0)\}\rangle$ y la matriz sí sería diagonalizable. En resumen

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = 1 \Rightarrow A \text{ no diagonalizable} \\ \\ \gamma \neq 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq 0 \text{ o } \beta \neq 0 \Rightarrow B \text{ no diagonalizable} \\ \\ \alpha = \beta = 0 \Rightarrow B \text{ diagonalizable} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

o B es diagonalizable si $\gamma \neq 1$ y $\alpha = \beta = 0$.

c)

$$\begin{aligned} \phi_C(\lambda) &= |C - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = (\alpha - \lambda)(\lambda - 4)(\lambda + 1) \\ \phi_C(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow (\alpha - \lambda)(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1 \end{aligned}$$

Si $\alpha \notin \{4, -1\} \Rightarrow$ Todos los valores son reales y distintos, por tanto la matriz será diagonalizable.

Supongamos que $\alpha = 4$, entonces $\lambda_1 = 4$ es un valor propio con $m(\lambda_1) = 2$. Para que C sea diagonalizable en este caso $\dim(N_{\lambda_1}) = 2$

$$\ker(C - \lambda_1 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0 = 0 \\ -x - 3y + 2z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 2z - 3y,$$

los autovectores son de la forma $(2z - 3y, y, z) = y(-3, 1, 0) + z(2, 0, 1) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \langle\{(-3, 1, 0); (2, 0, 1)\}\rangle$ y por tanto $\dim(N_{\lambda_1}) = 2$ y la matriz C será diagonalizable.

Supongamos que $\alpha = -1$, entonces $\lambda_3 = -1$ es un valor propio con $m(\lambda_3) = 2$. Para que C sea diagonalizable en este caso $\dim(N_{\lambda_3}) = 2$

$$\ker(C - \lambda_2 I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y = -\frac{4}{5}z \\ x = \frac{2}{5}z \end{cases},$$

los autovectores son de la forma $\left(\frac{2}{5}z, -\frac{4}{5}z, z\right) = z\left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1\right) \Longrightarrow N_{\lambda_2} = \left\langle \left\{ \left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1\right) \right\} \right\rangle$ Por tanto la matriz no será diagonalizable en este caso.

4. Sea f un endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{R}^3$ con valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y subespacios propios $N_{\lambda_1} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$ y $N_{\lambda_2} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, x + y = 0\right\}$. Calcula la expresión analítica de f.

Solución: Como f es un endomorfismo diagonalizable, la matriz asociada las bases canónicas de R^3 es diagonalizable, es decir, existe una matriz diagonal D y una matriz de paso (cambio de base) P, tal que

$$M_C(f) = P^{-1}DP$$

Como f es diagonalizable

$$\dim N_{\lambda_k} = m(\lambda_k)$$

Para N_{λ_1}

$$x+z = 0 \Leftrightarrow z = -x \Rightarrow (x, y, -x) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle\{(1, 0, -1); (0, 1, 0)\}\rangle \Rightarrow \dim N_{\lambda_1} = 2$$

mientras que para N_{λ_2}

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0; y = -x \Rightarrow (x, -x, 0) = x(1, -1, 0) \Rightarrow N_{\lambda 2} = \langle\{(1, -1, 0)\}\rangle \Rightarrow \dim N_{\lambda_1} = 1$$

por tanto $\lambda_1 = 1$ tiene multiplicidad 2 y $\lambda_2 = -1$ tiene multiplicidad 1, por tanto

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la expresión analítica es

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 2z \\ 2x + y + 2z \\ z \end{pmatrix}$$

5. Sea f un endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{R}^3$ con valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$, y subespacios propios $N_{\lambda_1} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0; x - z = 0\right\}$, $N_{\lambda_2} = \left\{(x, y, z) \in R^3 \mid x = 0, y + z = 0\right\}$ y $N_{\lambda_3} = \left\{(x, y, z) \in R^3 \mid x + y = 0, 2x + y = 0\right\}$. Calcula la expresión analítica de f.

Solución: Como f es un endomorfismo diagonalizable, la matriz asociada las bases canónicas de R^3 es diagonalizable, es decir, existe una matriz diagonal D y una matriz de paso (cambio de base) P, tal que

$$M_C(f) = P^{-1}DP$$

Para N_{λ_1}

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ \\ x-y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=z \Rightarrow (x,x,x)=x\,(1,1,1) \Rightarrow N_{\lambda_1}=\langle\{(1,1,1)\}\rangle \Rightarrow \dim N_{\lambda_1}=1$$

para N_{λ_2}

$$\left\{\begin{array}{r} x=0 \\ \\ y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0; z=-y \Rightarrow (0,y,-y)=y\,(0,1,-1) \Rightarrow N_{\lambda_2}=\langle\{(0,1,-1)\}\rangle \Rightarrow \dim N_{\lambda_2}=1$$

para N_{λ_2}

$$\left\{\begin{array}{r} x+y=0 \\ \\ 2x+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=0 \Rightarrow (0,0,z)=z\,(0,0,1) \Rightarrow N_{\lambda_3}=\langle\{(0,0,1)\}\rangle \Rightarrow \dim N_{\lambda_3}=1$$

Como los valores propios son reales y distintos

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M_C(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y la expresión analítica es

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ x-y \\ 3y-5x+2z \end{pmatrix}.$$

6. Hallar el polinomio característico, los valores propios y los subespacios propios de las siguientes matrices:

$$\textbf{(a)}\ A=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(b)}\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{(c)}\ C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(d)}\ D=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Buscaremos el polinomio característico de cada matriz.

a)

$$\phi_{A_1}(\lambda)=\det(A_1-\lambda I_2)=\left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 9 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right|=(1-\lambda)^2-36=\lambda^2-2\lambda-35$$

Obtenemos los valores propios de A_1 igualando a 0 el polinomio característico

$$\phi_{A_1}(\lambda)=0 \Longleftrightarrow \lambda^2-2\lambda-35=0 \Longleftrightarrow \lambda=\frac{2\pm\sqrt{4+140}}{2}=\frac{2\pm 12}{2} \Longleftrightarrow \lambda_1=-5;\ \lambda_2=7.$$

Como son dos valores reales y distintos para una matriz 2×2, la matriz A_1 es diagonalizable. Vamos a encontrar los vectores propios asociados a cada valor propio. Supongamos que $\vec{v}_1=(x,y)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1=-5$, entonces

$$\vec{v}_1\in\ker(A_1+5I_2)\Leftrightarrow(A_1+5I_2)\vec{v}_1=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1+5 & 9\\ 4 & 1+5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}6 & 9\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\left.\begin{array}{r}6x+9y=0\\ \\ 4x+6y=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}2x+3y=0\\ \\ 2x+3y=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow 2x+3y=0,$$

ecuación que tiene por solución paramétrica

$$x=\alpha;\ y=-\frac{2}{3}\alpha\Rightarrow\vec{v}_1=\left(\alpha,-\frac{2}{3}\alpha\right)\Rightarrow N_{\lambda_1}=\left\langle\left\{\left(1,-\frac{2}{3}\right)\right\}\right\rangle.$$

Supongamos ahora que $\vec{v}_2=(x,y)$ es el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2=7$, entonces

$$\vec{v}_2\in\ker(A_1-7I_2)\Leftrightarrow(A_1-7I_2)\vec{v}_2=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1-7 & 9\\ 4 & 1-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{r}-6x+9y=0\\ \\ 4x-6y=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}-2x+3y=0\\ \\ 2x-3y=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow 2x-3y=0,$$

ecuación que tiene por solución paramétrica

$$x=\alpha;\ y=\frac{2}{3}\alpha\Rightarrow\vec{v}_2=\left(\alpha,\frac{2}{3}\alpha\right)\Rightarrow N_{\lambda_2}=\left\langle\left\{\left(1,\frac{2}{3}\right)\right\}\right\rangle.$$

La matriz diagonal y la matriz de paso son

$$D_1=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}\qquad P_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

podemos comprobar que

$$\begin{aligned}P_1^{-1}D_1P_1 &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 9\\ 4 & 1\end{pmatrix}=A_1\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\phi_{A_2}(\lambda) &= \det(A_2-\lambda I_3)=\left|\begin{pmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 4 & 2-\lambda & 0\\ 3 & 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}\right|=(3-\lambda)\left|\begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\ 4 & 2-\lambda\end{pmatrix}\right|\\ &= (3-\lambda)\left((2-\lambda)^2-4\right)=(3-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda\right)=(3-\lambda)\lambda(\lambda-4)\Longleftrightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=4\end{aligned}$$

Hay 3 valores propios reales y distintos, por tanto la matriz A_2 es diagonalizable.

Vamos a encontrar los vectores propios asociados a cada valor propio. Supongamos que $\vec{v}_1 = (x, y, z)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$, entonces

$$\vec{v}_1 \in \ker(A_2 - 0I_2) \Leftrightarrow A_2\vec{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ \\ 4x + 2y = 0 \\ \\ 3x + 2y + 3z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rr} 2x + y = 0 & (1) \\ \\ 3x + 2y + 3z = 0 & (2) \end{array}\right\}$$

De la ecuación (1) $y = -2x$, y sustuimos en la ecuacion (2) $3x + 2(-2x) + 3z = 0 \Longleftrightarrow -x + 3z = 0 \Longleftrightarrow z = \frac{x}{3}$, la solución paramétrica es

$$x = \alpha;\ y = -2\alpha; z = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \vec{v}_1 = \left(\alpha, -2\alpha, \frac{\alpha}{3}\right) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \left(1, -2, \frac{1}{3}\right) \right\} \right\rangle.$$

Supongamos ahora que $\vec{v}_2 = (x, y, z)$ es el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 3$, entonces

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 \quad &\in \quad \ker(A_2 - 3I_3) \Leftrightarrow (A_2 - 3I_3)\vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 0 \\ 4 & 2-3 & 0 \\ 3 & 2 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ \\ 4x - y = 0 \\ \\ 3x + 2y = 0 \end{array}\right\}$$

sistema que tiene por solución $x = y = 0$, como z es libre la solución completa es

$$x = 0;\ y = 0; z = \alpha \Rightarrow \vec{v}_2 = (0, 0, \alpha) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle \{(0, 0, 1)\} \rangle$$

Finalmente obtendremos N_{λ_3} para el valor propio $\lambda_3 = 4$. Suponemos que $\vec{v}_3 = (x, y, z)$ es su vector propio asociado, entonces

$$\begin{aligned} \vec{v}_3 \quad &\in \quad \ker(A_2 - 4I_3) \Leftrightarrow (A_2 - 4I_3)\vec{v}_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-4 & 1 & 0 \\ 4 & 2-4 & 0 \\ 3 & 2 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{r} -2x + y = 0 \\ \\ 4x - 2y = 0 \\ \\ 3x + 2y - z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rr} 2x - y = 0 & (1) \\ \\ 3x + 2y - z = 0 & (2) \end{array}\right\}$$

De la ecuación (1) $y = 2x$, y sustuimos en la ecuacion (2) $3x + 2(2x) - z = 0 \Longleftrightarrow 7x - z = 0 \Longleftrightarrow z = 7x$, la solución paramétrica es

$$x = \alpha;\ y = 2\alpha; z = 7\alpha \Rightarrow \vec{v}_1 = (\alpha, 2\alpha, 7\alpha) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle\{(1, 2, 7)\}\rangle$$

La matriz diagonal y la matriz de paso son

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

podemos comprobar que

$$\begin{aligned} P_2^{-1} D_2 P_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A_2. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \phi_{A_3}(\lambda) &= \det(A_3 - \lambda I_3) = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = (3-\lambda) \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (3-\lambda)^2 (2-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2 \end{aligned}$$

Hay 3 valores propios reales, pero hay dos iguales, así que no podemos determinar a primera vista si la matriz es o no diagonalizable. Para comprobarlo tendremos que ver la dimensión de los subespacios propios que deben coincidir con la multiplicidad del valor propio correspondiente.
Vamos a encontrar los vectores propios asociados a cada valor propio. Supongamos que $\vec{v}_1 = (x, y, z)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, entonces

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &\in \ker(A_3 - 3I_2) \Leftrightarrow (A_3 - 3I_2)\vec{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-3 & 0 & 0 \\ 1 & 3-3 & 0 \\ 3 & 2 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\left. \begin{array}{r} -x = 0 \\ \\ x = 0 \\ \\ 3x + 2y = 0 \end{array} \right\}$$

que tiene por solución $(0, 0, \alpha)$ y por tanto $N_{\lambda_1} = \langle\{(0, 0, 1)\}\rangle$, subespacio de dimensión 1, pero la multiplicidad de $\lambda_1 = 3$ es $m(\lambda_1) = 2$, por tanto la matriz no es diagonalizable y no es necesario encontrar el subespacio propio asociado a λ_3.

d)

$$
\begin{aligned}
\phi_{A_4}(\lambda) &= \det(A_4-\lambda I_3) = \left|\begin{pmatrix} 6-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 8-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}\right| = (5-\lambda)\left|\begin{pmatrix} 6-\lambda & 1 \\ 3 & 8-\lambda \end{pmatrix}\right| \\
&= (5-\lambda)\left((6-\lambda)(8-\lambda)-3\right) = (5-\lambda)\left(\lambda^2-14\lambda+45\right)
\end{aligned}
$$

Obtenemos los valores propios igualando a 0

$$\phi_{A_4}(\lambda)=0 \Leftrightarrow (5-\lambda)\left(\lambda^2-14\lambda+45\right)0 \Leftrightarrow \lambda=5 \text{ y } \lambda^2-14\lambda+45=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{14\pm\sqrt{196-180}}{2}=\frac{14\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{14\pm 4}{2}$$

Hay 3 valores propios reales, pero hay dos iguales, así que no podemos determinar a primera vista si la matriz es o no diagonalizable. Para comprobarlo tendremos que ver la dimensión de los subespacios propios que deben coincidir con la multiplicidad del valor propio correspondiente.
Vamos a encontrar los vectores propios asociados a cada valor propio. Supongamos que $\vec{v}_1=(x,y,z)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1=\lambda_2=5$, entonces

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_1 &\in \ker(A_4-\lambda I_3) \Leftrightarrow (A_4-\lambda I_3)\vec{v}_1=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6-5 & 1 & 0 \\ 3 & 8-5 & 0 \\ 2 & 2 & 5-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

y por tanto

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ \\ 3x+3y=0 \\ \\ 2x+2y=0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \quad x+y=0 \ \}$$

que tiene por solución $y=-x$, siendo z, luego la solución del sistema es de la forma $(\alpha,-\alpha,\beta)$ y por tanto $N_{\lambda_1}=\langle\{(1,-1,0);(0,0,1)\}\rangle$, subespacio de dimensión 2, que coincide con la multiplicidad de $\lambda_1=5$ que es $m(\lambda_1)=2$.
Vamos a encontrar los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_3=9$. Supongamos que $\vec{v}=(x,y,z)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_3=9$, entonces

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_3 &\in \ker(A_4-\lambda_3 I_3) \Leftrightarrow (A_4-9I_3)\vec{v}_3=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6-9 & 1 & 0 \\ 3 & 8-9 & 0 \\ 2 & 2 & 5-9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

y por tanto

$$\left.\begin{array}{rl} -3x+y=0 & (1) \\ \\ 3x-y=0 & (2) \\ \\ 2x+2y-4z=0 & (3) \end{array}\right\}$$

Sumando (1) y (2) obtenemos $y=3x$, y sustuimos en la ecuacion (3) $2x+2(3x)-4z=0 \Longleftrightarrow 8x-4z=0 \Longleftrightarrow z=2x$, la solución paramétrica es

$$x=\alpha;\ y=3\alpha; z=2\alpha \Rightarrow \vec{v}_1=(\alpha,3\alpha,2\alpha) \Rightarrow N_{\lambda_3}=\langle\{(1,3,2)\}\rangle.$$

La matriz diagonal y la matriz de paso son

$$D_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad P_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

podemos comprobar que

$$\begin{aligned} P_4^{-1} D_4 P_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = A_4 \end{aligned}$$

7. Consideremos el tensor[1] $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como $T(x, y) = (2x - y, x + 4y)$. Si consideramos el sistema de referencia[2] habitual en Física $B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$, es decir la base canónica de $\mathbb{R}^2$, entonces T está representado por la matriz

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

es decir, $T_1 = M_{B \to B}(T)$. Si ahora consideramos un nuevo sistema de referencia dado por los vectores $B' = \{v_1 = (1, -1), v_2 = (3, 2)\}$, entonces el tensor T viene representado por la matriz

$$T_2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comprueba que los autovalores de las matrices T_1 y T_2 son iguales y que los autovectores también son los mismos, sin embargo, las coordenadas de éstos últimos dependen del sistema de referencia que estemos usando. No podía ser de otra forma: los autovalores son independientes del sistema de referencia. Y los autovectores también, pero en el sentido de que dependen solamente del tensor aunque sus coordenadas cambien según la matriz que usemos para representar el tensor.

Solución: Calculo del polinomio característico y de los valores propios para T_1

$$\begin{aligned} p_{T_1}(\lambda) &= |T_1 - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 6\lambda + 9, \\ p_{T_1}(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3. \end{aligned}$$

Cálculo del polinomio característico y de los valores propios para T_2

$$\begin{aligned} p_{T_2}(\lambda) &= |T_2 - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = (3-\lambda)^2, \\ p_{T_2}(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3. \end{aligned}$$

Cálculo de los autovectores de T_1 para el único autovalor $\lambda = 3$

$$\ker(T_1 - 3I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow y = -x,$$

[1] En este contexto el tensor es sinónimo de endomorfismo sobre $\mathbb{R}^2$.

[2] En este contexto un sistema de referencia en el es una base del espacio vectorial correspondiente.

los autovectores, expresados en la base B, son de la forma

$$v_B = (x, -x)_B\,.$$

Cálculo de los autovectores para T_2 para el único autovalor $\lambda = 3$

$$\ker(T_2 - 3I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -5y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

los autovectores, expresados en la base B', son de la forma

$$v_{B'} = (x, 0)_{B'}\,.$$

Aunque tengan expresiones distintas, hay que tener en cuenta que los vectores están expresados en bases distintas; si expresamos este vector en la base canónica (base B) se obtiene

$$(x, 0)_{B'} = x\,(1, -1) + 0\,(3, 2) = (x, -x)$$

que vemos que coincide con la expresión obtenida para los autovalores de T_1.

8. **Tensor de inercia de un sólido rígido**. En Mecánica del Sólido Rígido, el llamado *tensor de inercia* en un punto es una aplicación lineal que, como todas, se representa por medio de una matriz (en este caso simétrica) que denotaremos por T_i. Las llamadas *direcciones principales de inercia* se corresponden con los autovectores de T_i mientras que los *momentos principales de inercia* son los autovalores. Supongamos que el tensor de inercia en coordenadas cartesianas de un sólido bidimensional viene dado por

$$T_i = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcula los momentos principales y las direcciones principales de inercia de I.

Interpretación geométrica: Consideremos la elipse de ecuación $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$. Dibuja, con MAXIMA, dicha elipse. Comprueba que, con la ayuda de la matriz T_i anterior, la ecuación de la elipse puede escribirse en la forma

$$(x, y) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

Comprueba que los autovalores de T_i son $\lambda_1 = 9$ y $\lambda_2 = 1$ y que sus autovectores asociados (normalizados) son $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ y $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. La matriz de cambio de base P que contiene los autovectores es ortogonal con lo que $P^{-1} = P^T$. Por tanto, se tiene la descomposición

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos por la izquierda por (x, y) y por la derecha por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se tiene la identidad

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2$$

lo que indica que con el cambio de variables $u = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ e $v = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$, la ecuación de la elipse es $9u^2 + v^2 = 1$. Dibuja con MAXIMA esta nueva elipse.

Solución: Como se ha indicado en el texto, los momentos y direcciones principales de inercia son los valores y vectores propios del tensor de inercia. Calculamos los valores propios mediante el polinomio característico:

$$\begin{aligned} p_i(\lambda) &= |T_i - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} \right| = (5-\lambda)(5-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9, \\ p_i(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 9. \end{aligned}$$

Y a continuación los vectores propios correspondientes. Para el autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\ker(T_i - I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4x + 4y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = -x,$$

los autovectores son de la forma $(x, -z)$ y tomaremos como base $v_1 = (1, -1)$.

Para el autovalor $\lambda_2 = 9$

$$\ker(T_i - 9I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -4x + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = x,$$

los autovectores son de la forma (x, x) y tomamos como base $v_2 = (1, 1)$.

Notar que la base B de $\mathbb{R}^2$, definida como $B = \{(1, -1), (1, 1)\}$ es ortogonal para el producto escalar euclídeo usual. Entonces dividiendo cada vector por su respectiva norma, obtendremos la base ortonormal buscada.

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1) \Longrightarrow \|v_1\| = \sqrt{2} \Longrightarrow v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1), \\ v_2 &= (1, 1) \Longrightarrow \|v_2\| = \sqrt{2} \Longrightarrow v_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1). \end{aligned}$$

El resto se obtiene sustituyendo directamente en las expresiones.

9. **Elasticidad Lineal**. Se supone que el tensor de pequeñas deformaciones ε en un entorno de un punto de un sólido elástico trabajando a deformación plana viene dado por la matriz

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 120 & -80 \\ -80 & 100 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

Calcula las deformaciones principales (autovalores) y direcciones principales de deformación (autovectores normalizados[3]).

Interpretación geométrica: la misma que en el ejercicio anterior pero cambiando la palabra inercia por deformación.

Solución: Valores propios de ε

$$\begin{aligned} p_\varepsilon(\lambda) &= |\varepsilon - \lambda I| = \begin{vmatrix} 120 \cdot 10^{-6} - \lambda & -80 \cdot 10^{-6} \\ -80 \cdot 10^{-6} & 100 \cdot 10^{-6} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 220 \cdot 10^{-6} \lambda + 5600 \cdot 10^{-12} \\ &= \lambda^2 - \frac{11}{50000} \lambda + \frac{7}{1250000000} \\ p_\varepsilon(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 220 \cdot 10^{-6} \lambda + 5600 \cdot 10^{-12} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \left(110 \pm 10\sqrt{65}\right) \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Calculamos los vectores propios. Para $\lambda_1 = \left(110 + 10\sqrt{65}\right) \cdot 10^{-6}$

$$\begin{aligned} |\varepsilon - \lambda I| &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} 120 \cdot 10^{-6} - \lambda_1 & -80 \cdot 10^{-6} \\ -80 \cdot 10^{-6} & 100 \cdot 10^{-6} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} \left(10 - 10\sqrt{65} \cdot\right) 10^{-6} & -80 \cdot 10^{-6} \\ -80 \cdot 10^{-6} & \left(-10 - 10\sqrt{65} \cdot\right) 10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \end{aligned}$$

[3] De módulo 1.

$$\left\{\begin{array}{c}\left(10-10\sqrt{65}\cdot\right)10^{-6}x-80\cdot10^{-6}y=0\\ \\ -80\cdot10^{-6}x+\left(-10-10\sqrt{65}\cdot\right)10^{-6}y=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}\left(10-10\sqrt{65}\cdot\right)x-80y=0\\ \\ -80x+\left(-10-10\sqrt{65}\cdot\right)y=0\end{array}\right.,$$

Sistema cuya solución general es

$$\left(x,\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{65}\right)x\right).$$

El subespacio propio asociado a λ_1 será

$$N_{\lambda_1=}\left\langle\left(1,\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{65}\right)\right)\right\rangle$$

Para $\lambda_2=\left(110-10\sqrt{65}\right)\cdot10^{-6}$

$$|\varepsilon-\lambda I|=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}120\cdot10^{-6}-\lambda & -80\cdot10^{-6}\\ -80\cdot10^{-6} & 100\cdot10^{-6}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\left(10+10\sqrt{65}\cdot\right)10^{-6} & -80\cdot10^{-6}\\ -80\cdot10^{-6} & \left(-10+10\sqrt{65}\cdot\right)10^{-6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}\left(10+10\sqrt{65}\cdot\right)10^{-6}x-80\cdot10^{-6}y=0\\ \\ -80\cdot10^{-6}x+\left(-10+10\sqrt{65}\cdot\right)10^{-6}y=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}\left(10+10\sqrt{65}\cdot\right)x-80y=0\\ \\ -80x+\left(-10+10\sqrt{65}\cdot\right)y=0\end{array}\right.,$$

Sistema cuya solución general es

$$\left(x,\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{65}\right)x\right)$$

y el subespacio propio asociado a λ_2 será

$$N_{\lambda_2=}\left\langle\left(1,\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{65}\right)\right)\right\rangle$$

Los vectores normalizados son

$$\begin{aligned}n_1 &= \left.\frac{2^{5/2}}{\sqrt{65-\sqrt{65}}},\frac{1-\sqrt{65}}{\sqrt{2}\sqrt{65-\sqrt{65}}}\right)\\ n_2 &= \left.\frac{2^{5/2}}{\sqrt{65+\sqrt{65}}},\frac{1+\sqrt{65}}{\sqrt{2}\sqrt{65+\sqrt{65}}}\right)\end{aligned}$$

o numéricamente

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= (\mp0{,}7497,\mp0{,}6618),\\ \vec{n}_2 &= (\mp0{,}6618,\mp0{,}7497).\end{aligned}$$

10. La **teoría de Hückel en Química Orgánica** analiza la posibilidad para algunos tipos de moléculas de tener propiedades aromáticas. Aplicada al ciclobutadieno C_4H_4, aparece asociado el problema de autovalores definido por la ecuación

$$\mathbf{HC}=E\mathbf{C}$$

donde $\mathbf{H}$ representa el Hamiltoniano efectivo de un π electrón del sistema, los autovalores E de $\mathbf{H}$ son la energías orbitales de los π electrones, y los autovectores $\mathbf{C}$ representan las correspondientes orbitales moleculares. En concreto,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

donde α, β son números reales negativos.

Comprueba que los autovalores de $\mathbf{H}$ son $E_1 = \alpha + 2\beta$, $E_2 = E_3 = \alpha$, $E_4 = \alpha - 2\beta$, y que $C_1 = (1,1,1,1)$, $C_2 = (0,1,0,-1)$, $C_3 = (1,0,-1,0)$, $C_4 = (1,-1,1,-1)$ son autovectores asociados.

Solución: Contruimos el polinomio característico:

$$\begin{aligned}
p_H(\lambda) &= |H - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha-\lambda & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha-\lambda & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha-\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= (\alpha-\lambda) \left| \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & \beta & 0 \\ \beta & \alpha-\lambda & \beta \\ 0 & \beta & \alpha-\lambda \end{pmatrix} \right| - \beta \left| \begin{pmatrix} \beta & \beta & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & \beta \\ \beta & \beta & \alpha-\lambda \end{pmatrix} \right| - \beta \left| \begin{pmatrix} \beta & \alpha-\lambda & \beta \\ 0 & \beta & \alpha-\lambda \\ \beta & 0 & \beta \end{pmatrix} \right| \\
&= (\alpha-\lambda)\left((\alpha-\lambda)^3 - 2\beta^2(\alpha-\lambda)\right) - \beta^2(\alpha-\lambda)^2 - \beta^2(\alpha-\lambda)^2 \\
&= (\alpha-\lambda)^2\left((\alpha-\lambda)^2 - 2\beta^2\right) - 2\beta^2(\alpha-\lambda)^2 \\
&= (\alpha-\lambda)^2\left((\alpha-\lambda)^2 - 4\beta^2\right)
\end{aligned}$$

Calculamos los valores propios:

$$P_H(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \alpha \text{ (doble)} \\ (\alpha-\lambda)^2 - 4\beta^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\lambda)^2 = 4\beta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha-\lambda) = 2\beta \Rightarrow \lambda = \alpha - 2\beta \\ (\alpha-\lambda) = -2\beta \Rightarrow \lambda = \alpha + 2\beta \end{cases} \end{cases}$$

Luego los valores propios son $E_1 = \alpha + 2\beta, E_2 = E_3 = \alpha$ y $E_4 = \alpha - 2\beta$. Calcularemos ahora los autovectores para cada autovalor.

Para $E_1 = \alpha + 2\beta$

$$\begin{pmatrix} \alpha-E_1 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha-E_1 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha-E_1 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha-E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2\beta & \beta & 0 & \beta \\ \beta & -2\beta & \beta & 0 \\ 0 & \beta & -2\beta & \beta \\ \beta & 0 & \beta & -2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2\beta x + \beta y + \beta t = 0 \\ \beta x - 2\beta y + \beta z = 0 \\ \beta y - 2\beta z + \beta t = 0 \\ \beta x + \beta z - 2\beta t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (\beta \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + t = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ y - 2z + t = 0 \\ x + z - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = t$$

Los autovalores son de la forma (x,x,x,x), con base $(1,1,1,1)$

Para $E_2 = E_3 = \alpha$

$$\begin{pmatrix} \alpha - E_2 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha - E_2 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - E_2 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha - E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \beta y + \beta t = 0 \\ \beta x + \beta z = 0 \\ \beta y + \beta t = 0 \\ \beta x + \beta z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad (\beta \neq 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y + t = 0 \\ x + z = 0 \\ y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} t = -y \\ \\ z = -x \end{array} \right.$$

Los autovalores son de la forma $(x, y, -x, -y) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1)$, con base $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$.

Para $E_4 = \alpha - 2\beta$

$$\begin{pmatrix} \alpha - E_4 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha - E_4 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - E_4 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha - E_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2\beta & \beta & 0 & \beta \\ \beta & 2\beta & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 2\beta & \beta \\ \beta & 0 & \beta & 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2\beta x + \beta y + \beta t = 0 \\ \beta x + 2\beta y + \beta z = 0 \\ \beta y + 2\beta z + \beta t = 0 \\ \beta x + \beta z + 2\beta t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad (\beta \neq 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x + y + t = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ x + z + 2t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = -x \\ z = x \\ t = -x \end{array} \right.$$

Los autovalores son de la forma $(x, -x, x, -x) = x(1, -1, 1, -1)$, con base $\{(1, -1, 1, -1)\}$.

11. Responde a las siguientes cuestiones:

   a) Sea $f : V \rightarrow V$ una aplicación lineal y supongamos que $\lambda = 0$ es un autovalor de f. ¿Es f inyectiva ? ¿Por qué ?

   b) Sea A una matriz invertible y sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ los autovalores de A. ¿Cuáles son los autovalores de A^{-1} ? ¿Qué relación existe entre los autovectores de A y los de A^{-1} ?

Solución:

a) No, puesto que si $\lambda = 0$, es un autovalor entonces, existe un vector $v \in V$ con $v \neq 0$ con

$$f(v) = 0 \cdot v$$

es decir $v \in \ker f$ y por tanto no es inyectiva.

b) Supongamos que $p_A(\lambda)$ y $p_{A^{-1}}(\lambda)$ son los polinomios característicos de A y A^{-1}, respectivamente, entonces, por definición

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I|$$

$$P_{A^{-1}}(\lambda) = \left|A^{-1} - \lambda I\right|$$

Como A es invertible, entonces ninguno de los valores propios de A puede ser nulo, ya que en caso contrario

$$P_A(0) \Rightarrow |A - 0I| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0 \Rightarrow A \text{ no es invertible } \sharp$$

Por otra parte sabemos que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, luego

$$P_{A^{-1}}(\lambda) = \left|A^{-1} - \lambda I\right| = \left|A^{-1} - \lambda A^{-1}A\right| = \left|A^{-1}(I - \lambda A)\right| = \left|A^{-1}\right| \cdot |I - \lambda A|$$

como hemos visto $\lambda \neq 0$ entonces, podemos sacar factor común λ, para poner

$$P_{A^{-1}}(\lambda) = \left|A^{-1}\right| \cdot \left|\lambda\left(\frac{1}{\lambda}I - A\right)\right| = \lambda\left|A^{-1}\right| \cdot \left|\left(\frac{1}{\lambda}I - A\right)\right|$$

o de forma equivalente

$$P_{A^{-1}}(\lambda) = \lambda\left|A^{-1}\right| \cdot \left|-\left(A - \frac{1}{\lambda}I\right)\right| = (-1)^n \lambda\left|A^{-1}\right|\left|A - \frac{1}{\lambda}I\right| = (-1)^n \lambda\left|A^{-1}\right| P_A\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

donde hemos hecho uso de las propiedades de los determinantes. De este modo si tomamos $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k}$ para $k = 1, \dots n$, entonces

$$P_{A^{-1}}(\mu_k) = P_{A^{-1}}\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) = (-1)^n \lambda_k\left|A^{-1}\right| P_A(\lambda_k) = (-1)^n \lambda_k\left|A^{-1}\right| \cdot 0 = 0.$$

12. **Algunos tipos destacados de matrices**. Recogemos en la siguienta tabla algunos tipos de matrices importantes en las aplicaciones junto con las propiedades de sus autovalores y autovectores

Matriz	Definición	Autovalores	Autovectores
Simétrica	$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ (si son ortogonales)
Definida Positiva	$x^T\mathbf{A}x > 0$	$\lambda > 0$	
de Markov	$m_{ij} > 0, \sum_{i=1}^n m_{ij} = 1$	$\lambda_{\text{máx}} = 1$	$v_j(\lambda_{\text{máx}}) > 0$
Tridiagonal Tipo 1	$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$	$\lambda_k = a + 2b\cos\frac{k\pi}{n+1}$	
Ejemplo $a = 2,\ b = -1$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$	$v_k = \left(\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n+1}, \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n+1}, \dots, \right)$

Determina de qué tipo son cada una de las siguientes matrices y calcula sus autovalores y autovectores:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

- M_1 es definida positiva y de Markov (por columnas). El polinomio característico y los valores propios son:

$$\begin{aligned} p_{M_1}(\lambda) &= |M_1 - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 0{,}8-\lambda & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 1{,}5\lambda + 0{,}5 \\ p_{M_1}(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1{,}5\lambda + 0{,}5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

  Los vectores propios son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & -0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -0{,}2x + 0{,}3y = 0 \\ 0{,}2x - 0{,}3y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x \Rightarrow N_{\lambda_1} = \left\langle \left(1, \frac{2}{3}\right) \right\rangle \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0{,}3x + 0{,}3y = 0 \\ 0{,}2x + 0{,}2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = -x \Rightarrow N_{\lambda_2} = \langle (1,-1) \rangle \end{aligned}$$

- M_2 es definida positiva. El polinomio característico y los valores propios son:

$$\begin{aligned} p_{M_2}(\lambda) &= |M_2 - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ p_{M_2}(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1. \end{aligned}$$

  Los vectores propios son:

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle (1,0) \rangle .$$

- M_3 es tridiagonal, simétrica y definida positiva, por tanto las raíces serán reales. El polinomio característico y los valores propios son:

$$\begin{aligned} p_{M_3}(\lambda) &= |M_3 - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 \\ p_{M_3}(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, \lambda_2 = 2 + \sqrt{2}, \lambda_3 = 2. \end{aligned}$$

  Y los vectores propios para cada valor propio.
  Para $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{2}x - y = 0 \\ -x + \sqrt{2}y - z = 0 \\ -y + \sqrt{2}z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = \sqrt{2}x \\ \\ y = \sqrt{2}z \end{array} \right.$$

  cuya solución es

$$\left(x, \sqrt{2}x, -x\right) \Rightarrow N_{\lambda_1} = \left\langle \left(1, \sqrt{2}, 1\right) \right\rangle$$

  Para $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -\sqrt{2}x - y = 0 \\ -x - \sqrt{2}y - z = 0 \\ -y - \sqrt{2}z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = -\sqrt{2}x \\ \\ y = -\sqrt{2}z \end{array} \right.$$

  cuya solución es

$$\left(x, \sqrt{2}x, -x\right) \Rightarrow N_{\lambda_2} = \left\langle \left(1, -\sqrt{2}, 1\right) \right\rangle$$

Para $\lambda_3 = 2$

$$\left(\begin{array}{rrr} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -y = 0 \\ -x - z = 0 \\ -y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = 0 \\ \\ z = -x \end{array}\right. ,$$

cuya solución es

$$(x, 0, -x) \Rightarrow N_{\lambda_3} = \langle(1, 0, -1)\rangle$$

- M_4 es simétrica. El polinomio característico y los valores propios son:

$$\begin{aligned} p_{M_4}(\lambda) &= |M_4 - \lambda I| = \left|\left(\begin{array}{ccc} 5-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & -1-\lambda \end{array}\right)\right| = -\lambda^3 + 7\lambda^2 + 9\lambda - 63 \\ p_{M_4}(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 7\lambda^2 + 9\lambda - 63 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 3. \end{aligned}$$

Y los vectores propios

$$\lambda_1 = -3 \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 8x - 4z = 0 \\ 6y = 0 \\ -4x + 2z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z = 2x \\ y = 0 \\ z = 2x \end{array}\right. \Rightarrow N_{\lambda_1} = \langle(1, 0, 2)\rangle.$$

$$\lambda_2 = 7 \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr} -2 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & -8 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -2x - 4z = 0 \\ -4y = 0 \\ -4x - 8z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z = -\frac{x}{2} \\ y = 0 \\ z = -\frac{x}{2} \end{array}\right. \Rightarrow N_{\lambda_2} = \left\langle\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)\right\rangle.$$

$$\lambda_3 = 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x - 4z = 0 \\ 0 = 0 \\ -4x - 4z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y \text{ libre} \\ z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow N_{\lambda_3} = \langle(0, 1, 0)\rangle.$$

13. Calcula la potencia $n-$ésima de las matrices M_1 y M_4 del ejercicio anterior.

Solución: La matriz M_1 tiene dos valores propios reales y distintos, luego será diagonalizable. Usamos los dos autovalores y los autovectores correspondientes para expresar

$$M_1 = \left(\begin{array}{cc} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{8}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right) = P_1^{-1} D_1 P_1$$

donde

$$\begin{aligned} D_1 &= \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \\ P_1^{-1} &= M_{D_1 \to C_1} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{array}\right) \Rightarrow P_1 = \left(\begin{array}{cc} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} M_1^n &= \left(P_1^{-1} D_1 P_1\right)^n = P_1^{-1} D_1^n P_1 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)^n \left(\begin{array}{cc} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n & -\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{5}\left(3 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) & \frac{3}{5}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ \frac{2}{5}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{5}\left(2 + \frac{3}{2^n}\right) \end{array}\right) \end{aligned}$$

La matriz M_4 tiene tres valores propios reales y distintos, luego también será diagonalizable. Usamos los dos autovalores y los autovectores correspondientes para expresar

$$M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P_4^{-1} D_4 P_4$$

donde

$$\begin{aligned} D_4 &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ P^{-1} &= M_{D\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} M_4^n &= \left(P_4^{-1} D_4 P_4\right)^n = P_4^{-1} D_4^n P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(-3)^n & 0 & \frac{2}{5}(-3)^n \\ \frac{4}{5}7^n & 0 & -\frac{2}{5}7^n \\ 0 & 3^n & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\left(4\cdot 7^n + (-3)^n\right) & 0 & \frac{2}{5}\left((-3)^n + 7^n\right) \\ 0 & 3^n & 0 \\ \frac{2}{5}\left((-3)^n - 7^n\right) & 0 & \frac{1}{5}\left(4\cdot(-3)^n + 7^n\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

14. Estudia para qué valores de los parámetros a y b es diagonalizable la matriz M.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Solución: El polinomio característico y los valores propios son:

$$\begin{aligned} p_M(\lambda) &= |M - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & b \\ 4 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} \right| = (5-\lambda)(-1-\lambda)(a-\lambda) \\ p_M(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(-1-\lambda)(a-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = a. \end{aligned}$$

Luego si $a \notin \{-1, 5\}$, los 3 valores propios son reales y distintos y por tanto M será diagonalizable.

Caso $a = 5$, los valores propios son $\lambda_1 = 5$, con multiplicidad $m(\lambda_1) = 2$ y $\lambda_2 = -1$, con multiplicidad $m(\lambda_2) = 1$. Para saber si es diagonalizable tendremos que estudiar qué ocurre con la dimensión del subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 5$. La matriz es

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

y los autovectores de λ_1 serán

$$\lambda_1 = 5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -6y + bz = 0 \\ 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y = bz \\ x = 0 \end{cases}$$

Se distinguen dos casos según b sea o no un valor nulo. Para $b = 0$

$$6y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow N_{\lambda_1} = \{(0,0,z)\} = \langle(0,0,1)\rangle \Rightarrow \dim(N_{\lambda_1}) = 1 \neq m(\lambda_2),$$

la matriz no es diagonalizable.

Si $b \neq 0$, entonces

$$z = \frac{6}{b}y \Rightarrow N_{\lambda_1} = \left\{\left(0, y, \frac{6}{b}y\right)\right\} = \left\langle\left(0, 1, \frac{6}{b}\right)\right\rangle \Rightarrow \dim(N_{\lambda_1}) = 1 \neq m(\lambda_2)$$

y de nuevo, tampoco M es diagonalizable.

Para el caso $a = -1$, los valores propios son $\lambda_1 = 5$ con multiplicidad $m(\lambda_1) = 1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ que tiene multiplicidad $m(\lambda_2)$. Como en el caso anterior, sólo hace falta comprobar que la dimesnión del subespacio propio asociado al valor propio múltiple. Para $\lambda_2 = -1$, la matriz es

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y los autovectores correspondientes

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ bz = 0 \\ 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ x = 0 \end{cases}$$

Distinguimos dos caso. Si $b = 0$, entonces tanto y como z quedan libres

$$N_{\lambda_2} = \{(0, y, z)\} = \langle(0,0,1);(0,1,0)\rangle$$

y la matriz es diagonalizable. Si $b \neq 0$

$$z = 0 \Rightarrow N_{\lambda_2} = \{(0, y, 0)\} = \langle(0,1,0)\rangle$$

y M no será es diagonalizable.

En resumen M es diagonalizable para $a \notin \{-1, 5\}$, siendo en este caso cualquiera el valor de b, si $a = 5$, no es diagonalizable para ningún valor de b y si $a = -1$, entonces sólo es diagonalizable cuando $b = 0$.

15. **Teorema de Perron-Frobenius**. El teorema que sigue es una pieza clave en el algoritmo *PageRank* que usa Google para ordenar las búsquedas de las páginas de Internet. En su versión más sencilla el Teorema de Perron-Frobenius se enuncia así: "Sea A una matrix cuadrada con entradas positivas, es decir, $a_{ij} > 0$. Entonces existe un autovalor simple (es decir, de multiplicidad 1) cuyo autovector asociado tiene todas sus componentes estrictamente positivas". Calcula los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y comprueba que se satisface el Teorema de Perron-Frobenius.

El polinomio característico es:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right| = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 8\lambda - 8.$$

Calculamos los valores propios

$$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 8\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+2)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 - \sqrt{5} \\ \lambda_2 = 3 + \sqrt{5} \\ \lambda_3 = -2 \end{array} \right\}.$$

Y los vectores propios para cada valor propio:
Valor propio $\lambda_1 = 3 - \sqrt{5}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5}-2 & 3 & 1 \\ 3 & \sqrt{5}-2 & 1 \\ 1 & 3 & \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\sqrt{5}-2\right)x + 3y + z = 0 \\ 3x + \left(\sqrt{5}-2\right)y + z = 0 \\ x + 3y + \left(\sqrt{5}-1\right)z = 0 \end{array} \right.$$

sistema cuya solución se obtiene restando las dos primeras ecuaciones y es

$$\left(x, x, \left(-1-\sqrt{5}\right)x\right) \Longrightarrow N_{\lambda_1} = \left\langle \left(1, 1, -1-\sqrt{5}\right) \right\rangle$$

Valor propio $\lambda_2 = 3 + \sqrt{5}$

$$\begin{pmatrix} -2-\sqrt{5} & 3 & 1 \\ 3 & -2-\sqrt{5} & 1 \\ 1 & 3 & -1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(-\sqrt{5}-2\right)x + 3y + z = 0 \\ 3x + \left(-\sqrt{5}-2\right)y + z = 0 \\ x + 3y + \left(-\sqrt{5}-1\right)z = 0 \end{array} \right.$$

sistema cuya solución se obtiene restando las dos primeras ecuaciones y es

$$\left(x, x, \left(-1+\sqrt{5}\right)x\right) \Longrightarrow N_{\lambda_2} = \left\langle \left(1, 1, -1+\sqrt{5}\right) \right\rangle$$

Valor propio $\lambda_3 = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 3y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 3y + z = 0 \\ \\ x + 3y + 4z = 0 \end{array} \right. ,$$

sistema cuya solución se obtiene restando las dos ecuaciones y es

$$\left(x, -\frac{11}{9}x, \frac{2x}{x}\right) \Longrightarrow N_{\lambda_3} = \left\langle \left(1, -\frac{11}{9}, \frac{2}{3}\right) \right\rangle.$$

El secreto de Google y el Álgebra Lineal. Se recomienda la lectura de este artículo profesor de la Universidad Autónoma de Madrid, Pablo Fernández Gallardo, a aquellos alumnos que tengan curiosidad por saber las Matemáticas usadas en el algoritmo PageRank de Google. En particular, se podrá apreciar el papel destacado del Teorema de Perron-Frobenius.